2. előadás

Halmazok

Definíció

Két halmazt akkor és csak akkor tekintünk **egyenlőnek**, ha elemeik ugyanazok.

Például: $\{1,2\}=\{2,1\}=\{1,1,2\}=\{1,2,2,1,2,1\}$

A halmazt, amelynek nincs eleme, **üres halmaznak** nevezzük. Jele: $\emptyset$.
Az "x dolog eleme az A halmaznak" jelölése: $x \in A$.
Az A halmazt a B halmaz **részhalmazának** nevezzük ($A \subseteq B$), ha az A minden eleme B-nek is eleme.
Az A halmaz **valódi része** a B-nek ($A \subset B$), ha $A \subseteq B$, de $A \neq B$.

Halmazokról mindig csak mint egy adott **alaphalmaz** részhalmazairól beszélünk, még ha ezt az alaphalmazt nem is nevezzük meg.

Halmazok megadása: $\{x \in \text{alaphalmaz} \mid \text{ feltételek } x-\text{re}\}$

Jelölések

Valós számok halmaza: $\mathbb{R}$
Pozitív valós számok halmaza: $\mathbb{R}^+$
Természetes számok halmaza: $\mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\}$. Van, ahol $\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\}$ definíció szerepel, ez csak megállapodás kérdése.

Egész számok halmaza: $\mathbb{Z} = \{\ldots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$
Pozitív egészek halmaza: $\mathbb{N}^+$ (vagy $\mathbb{Z}^+$).
Racionális számok halmaza: $\mathbb{Q} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \exists\, k \in \mathbb{Z} \text{ és } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},\ \text{melyre } x = \frac{k}{n}\right\}$.

Intervallumok: Például $[a;\, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$, $[a;\, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$ stb.;
$]\,a;\, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$, $]-\infty;\, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le b\}$ stb.
Az $]\,a;\, b[$, $]\,a;\, b]$ stb. helyett használatos az $(a;\, b)$, $(a;\, b]$ stb. jelölés is.

Műveletek halmazokkal

Unió vagy egyesítés: Az A és B halmaz $A \cup B$ unióján azoknak az elemeknek a halmazát értjük, amelyek a két halmaz közül legalább az egyikben benne vannak:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ vagy } x \in B\}$$

Metszet vagy közös rész: Az A és B halmaz $A \cap B$ metszetén azoknak az elemeknek a halmazát értjük, amelyek mindkét halmazban benne vannak.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ és } x \in B\}$$

Különbség: Az A és B halmaz $A \setminus B$ különbségén az A összes olyan elemének a halmazát értjük, amelyek nincsenek benne B-ben. $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ és } x \notin B\}$

Komplementer: Az A halmaz H-ra vonatkozó komplementerén a $H \setminus A$ halmazt értjük. Jele: $\overline{A}_H$. Ha az alaphalmaz nincs megnevezve, a komplementert $\overline{A}$ jelöli.

$$\overline{A}_H = \{x \in H \mid x \notin A\}$$

Azt mondjuk, hogy az A és B halmaz **diszjunkt**, ha $A \cap B = \emptyset$.

Descartes-szorzat

Rendezett párnál számít a sorrend: $(1, 2) \neq (2, 1)$

Megjegyzés: $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$

Descartes-szorzat: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ és } b \in B\}$

Azonosságok

Bármely A, B, C halmazra fennállnak az alábbi azonosságok:

Asszociativitás: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
Kommutativitás: $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$
Disztributivitás: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

De Morgan-azonosságok: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Logikai szita formula

Jelölje $|M|$ az M halmaz elemeinek számát. Ekkor fennálnak a következő azonosságok (A, B, C véges halmazok):

1. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
2. $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$

Feladatok

1. Határozza meg az $(A \setminus B) \setminus C$ halmaz elemszámát, ha A tartalmazza az összes 19-nél kisebb természetes
számot, továbbá B a prímszámok halmaza és C a páros számok halmaza!

2. Hány olyan 100-nál nem nagyobb pozitív egész szám van, amely
a) osztható 2-vel vagy 3-mal;
b) osztható 2-vel, 3-mal vagy 5-tel;
b) nem osztható sem 2-vel, sem 3-mal, sem 5-tel.

3. Egy osztályban két tanuló nem jár szakköre. 17-en járnak aritmetika, 12-en anatómia, 19-en atletika szakkörre. 6-an aritmetika és anatómia, 9-en anatómia és atletika, 7-en aritmetika és atletika szakkörre is járnak. 4-en mindhárom szakkörre. Hány fős az osztály?

Eredmények

1. 6 elemű
2. a) $50 + 33 - 1 = 67$ darab
b) $50 + 33 + 20 - 16 - 10 - 6 + 3 = 74$ darab
c) $100 - 74 = 26$ darab
3. Legyen A, B, C rendre az osztály aritmetika, anatómai és atletika szakköröseinek halmaza és

legyen $D = A \cap B \cap C$. Ekkor az adatok alapján (például Venn-diagramban ábrázolva) |D|=4, majd innen a kettős metszeteket figyelve
$|(A \cap B) \setminus D| = 2$, $|(B \cap C) \setminus D| = 5$, $|(C \cap A) \setminus D| = 3$, és a csak egy halmazban lévő elemek
$|(A \setminus B) \setminus C| = 8$, $|(B \setminus A) \setminus C| = 1$, $|(C \setminus A) \setminus B| = 7$, végül $|\overline{A \cup B \cup C}| = 2$. Az eredmény ennek a 8 db páronként diszjunkt halmaz elemszámának összege: 32. Vagy logikai szita formulával:
$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap B| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| =$, azaz az osztá-
$17 + 12 + 19 - 6 - 9 - 7 + 4 = 30$
lylétszám 32.

Számtani és mértani sorozatok

Számtani sorozatok

Definíció: Az (a_n) sorozat számtani sorozat, ha minden n pozitív egészre $a_{n+1} - a_n = d$ vagy $a_{n+1} = a_n + d$.
d: differencia

Állítás: Az (a_n) számtani sorozat n-edik tagja: $a_n = a_1 + (n-1)\,d$

Bizonyítás: Teljes indukcióval.
1) lépés: $a_2 = a_1 + d$
$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2\,d$
$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2\,d) + d = a_1 + 3\,d$
Tehát $n = 1, 2, 3, 4$ esetén igaz az állítás.

2) lépés: Tegyük fel, hogy $a_{n-1} = a_1 + (n-2)\,d$. Ekkor a definíció alapján

$$a_n = a_{n-1} + d = (a_1 + (n-2)\,d) + d = a_1 + (n-1)\,d$$

Ez éppen a bizonyítandó egyenlőség, tehát az állítás minder n-re igaz.

Tulajdonságok: Ha $\begin{cases} d > 0 \\ d < 0, \text{ akkor az } (a_n) \text{ sorozat} \\ d = 0 \end{cases} \begin{cases} \text{monoton növő, alulról korlátos} \\ \text{monoton csökkenő, felülről korlátos.} \\ \text{állandó sorozat, korlátos} \end{cases}$

Számtani közép tulajdonság

Ha (a_n) számtani sorozat, akkor

$$\begin{cases} a_{n-1} = a_n - d \\ a_{n+1} = a_n + d \end{cases} \Longrightarrow \quad a_{n-1} + a_{n+1} = (a_n - d) + (a_n + d) = 2\,a_n$$

Így minden $n \geq 2$ egész esetén: $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$

Hasonlóan, minden $n > k$ esetén $a_n = \dfrac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$

Az első *n* tag összege: S_n

Az első n tag összegét kétféleképpen felírva, majd az egyenleteket összeadva:

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$
$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1$

$2\,S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$

Az összeg minden tagja $a_1 + a_n$-nel egyenlő, ugyanis

$a_2 + a_{n-1} = (a_1 + d) + (a_n - d) = a_1 + a_n$
$a_3 + a_{n-2} = (a_1 + 2\,d) + (a_n - 2\,d) = a_1 + a_n$ stb.

Így $2\,S_n = (a_1 + a_n)\cdot n \implies S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2}\cdot n$

Felhasználva, hogy $a_n = a_1 + (n-1)\,d \implies S_n = \dfrac{2\,a_1 + (n-1)\,d}{2}\cdot n$

Mértani sorozatok

Definíció: Az (a_n) sorozat mértani sorozat, ha minden n pozitív egészre $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$ vagy $a_{n+1} = a_n \cdot q$ ($a_n \neq 0$).

q: kvóciens vagy hányados

Állítás: Az (a_n) mértani sorozat n-edik tagja: $a_n = a_1\,q^{n-1}$.

Bizonyítás: Teljes indukcióval (házi feladat).

Tulajdonságok: Ha $\begin{cases} q > 0 \\ q < 0 \end{cases}$, akkor a sorozat tagjai $\begin{cases} \text{azonos előjelűek} \\ \text{váltakozó előjelűek} \end{cases}$.

Ha $\begin{cases} q > 1 \\ 0 < q < 1 \\ q = 1 \end{cases}$, akkor az (a_n) sorozat $\begin{cases} \text{monoton növő} \\ \text{monoton csökkenő} \\ \text{állandó sorozat} \end{cases}$.

Mértani közép tulajdonság

Ha (a_n) mértani sorozat, akkor

$$\begin{cases} a_{n-1} = \dfrac{a_n}{q} \\ a_{n+1} = a_n\,q \end{cases} \implies a_{n-1}\cdot a_{n+1} = \frac{a_n}{q}\cdot a_n\,q = a_n^2 \implies |\,a_n\,| = \sqrt{a_{n-1}\cdot a_{n+1}}$$

Ha $a_{n-1},\ a_n,\ a_{n+1} > 0,\ \ n \geq 2$, akkor $a_n = \sqrt{a_{n-1}\cdot a_{n+1}}$.

Az első *n* tag összege: S_n

Ha $q = 1$, akkor $S_n = a_1 + a_1 + a_1 + \ldots + a_1 + a_1 = n\cdot a_1$.

Ha $q \neq 1$, akkor

Az első n tag összegét q-val szorozva, majd a második egyenletből az elsőt kivonva:

$S_n = a_1 + a_1\, q + a_1\, q^2 + \ldots + a_1\, q^{n-2} + a_1\, q^{n-1}$
$S_n \cdot q = a_1\, q + a_1\, q^2 + a_1\, q^3 + \ldots + a_1\, q^{n-1} + a_1\, q^n$

$S_n \cdot q - S_n = a_1\, q^2 - a_1$
$S_n(q-1) = a_1(q^n - 1)$

$$\Longrightarrow S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad (\text{ahol } q \neq 1).$$

Feladatok

1. Egy számtani sorozat első tagja 120, a nyolcadik tagja a sorozat differenciájával egyenlő. Mennyi a sorozat második tagja?

2. Egy könyvszekrény alsó polcán 18 könyv van, és fölötte minden polcon hárommal több, mint az alatta lévőn. Összesen hány polc van a könyvszekrényben, ha tudjuk, hogy a legfelső polcon 50-nél több, de 54-nél kevesebb könyv van?

3. Határozza meg az első 100 hárommal osztható pozitív egész szám összegét!

4. Egy számtani sorozat első három tagjának összege 12, a harmadik, negyedik, és ötödik tag összege 30. Mennyi az első 10 tag összege?

5. Egy moziterem nézőterének utolsó, huszadik sorában 34 férohely van. Az első sortól kezdve minden következő sorban eggyel több szék van, mint az előtte lévőn. Hányan lehetnek a moziban szombat este egy teltházas előadás alatt?

6. Egy derékszögű háromszög oldalhosszai számtani sorozatot alkotnak. A köréírt kör sugara 5 cm. Mennyi a háromszög kerülete?

7. Egy háromszög oldalai egy számtani sorozat egymást követő tagjai. A háromszög kerülete 36 cm, legrövidebb és leghosszabb oldalának szorzata 108 cm. Hány centiméter hosszú a háromszög leghosszabb oldala?

8. Három szám mértani sorozatot alkot. Szorzatuk −8, összegük 3. Határozzuk meg a sorozat első három tagját.

9. Egy mértani sorozat első három tagjának összege −7, az első és a harmadik tag szorzata 9. Határozzuk meg a sorozat első három tagját.

10. Egy mértani sorozat első 5 tagjának szorzata 1, az első három tag összege 3. Határozzuk meg a sorozat első tagját és hányadosát.

Eredmények

1. 100 **2.** 12 **3.** 15150 **4.** 145 **5.** 490 **6.** 24 cm **7.** 18 cm **8.** 1, −2, 4 vagy 4, −2, 1

9. −1, 3, −9 vagy −9, 3, −1 **10.** $a_1 = 1$, $q = 1$ vagy $a_1 = 4$, $q = -\frac{1}{2}$