BME TTK Érettségi Felkészítő 2022

I. Alkalom

Racionális és irracionális számok, oszthatóság, számrendszerek

1. Panni és Kati elvállalta, hogy szövegszerkesztővel legépelik Dani szakdolgozatát. A két lány együttes munkával 12 munkaóra alatt végezne a gépeléssel. Kedden reggel 8 órakor kezdett Panni a munkához, Kati 10 órakor fogott hozzá. Megállás nélkül, ki-ki egyenletes sebességgel dolgozott kedden 14 óráig, ekkor a kéziratnak a 40%-ával végeztek, és abbahagyták a munkát. (2006. május 09.)

a) Hány óra alatt gépelné le Panni, illetve Kati a teljes szakdolgozatot (állandó munkatempót, és megszakítás nélküli munkát feltételezve)?

Szerdán reggel egyszerre kezdtek hozzá 9 órakor a gépeléshez, és együtt egyszerre fejezték be. Szerdán Panni fél óra ebédszünetet tartott, Kati pedig a délelőtti munkáját egy órányi időtartamra megszakította.

b) Hány órakor végeztek a lányok a munkával szerdán?

5. a)

Jelölje x azt az időt (órában), amennyi idő alatt Panni egyedül begépelte volna a kéziratot, y pedig azt, amennyi alatt Kati végezte volna el ugyanezt a munkát egyedül.
Panni szerdán t órát fordított a gépelésre.
Foglaljuk táblázatba a szövegből kiolvasható adatokat:

	a teljes munka elvégzése (h)	1 óra alatti teljesítmény	gépelésre fordított idő (h)
			kedden
Panni	x	$\frac{1}{x}$	6
Kati	y	$\frac{1}{y}$	4
együtt	12	$\frac{1}{12}$	

A táblázat helyes kitöltése.	3 pont*	*Oszloponként 1-1 pont.*
Mindezekből tudhatjuk a munka elvállalásakor: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12}$;	1 pont	*Ha a táblázatos kitöltés helyett a vizsgázó az egyenleteket írja fel, a *-gal jelölt 3 pontot 2+1 bontásban akkor adjuk hozzá az 1+2 pontokhoz. Maximum 5 pont adható, ha nem világosan rögzített jelölésekkel dolgozik.*
a keddi nap végén: $\frac{6}{x}+\frac{4}{y}=\frac{2}{5}$;	2 pont	
A két egyenletből $x=30$ (óra) $y=20$ (óra).	2 pont	
A feladat feltételeinek megfelelően Panni 30 óra, Kati 20 óra alatt végzett volna egyedül a munkával.	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	

5. b)		
Szerdán Panni t, Kati $t-\frac{1}{2}$ órát gépelt.	1 pont	
Szerda délután, a munka befejezésekor $\frac{t}{30}+\frac{t-\frac{1}{2}}{20}=\frac{3}{5}$.	2 pont	*A pontszám nem bontható.*
$t = 7,5$ (óra).	1 pont	
Panni fél óráig ebédelt, ezért a gépelésre fordított 7,5 óra 8 óra „munkaidőre” változik. Kati szerdán 7,5 – 0,5 = 7 órát gépelt, és egy órával több (vagyis 8 óra) volt a „munkaideje”.	2 pont	
Szerdán 9 órakor kezdtek, és mindketten 8 óra „munkaidő” után fejezték be a gépelést, vagyis 17 órára lettek készen a kézirattal.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

2. Az érett szilva tömegének kb. 5%-a a mag tömege. A kimagozott szilva átlagosan 90% vizet és 10% ún. szárazanyagot tartalmaz. A szilva aszalásakor a szárítási technológia során addig vonunk el vizet a kimagozott szilvából, amíg a megmaradt tömegnek csak az 5%-a lesz víz, a többi a változatlan szárazanyag-tartalom. Az így kapott terméket nevezzük aszalt szilvának. (2007. május 08.)

a) A fentiek figyelembevételével mutassa meg, hogy 10 kg leszedett szilvából 1 kg aszalt szilva állítható elő!

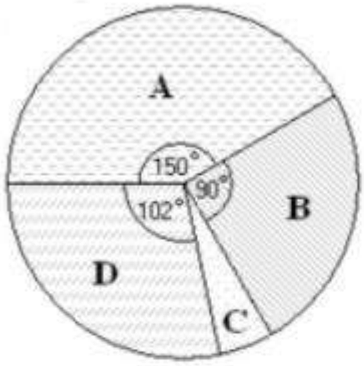
Az aszalt szilva kilóját 1400 Ft-ért, a nyers szilvát pedig 120 Ft-ért lehet értékesíteni.

b) Kovács úr szilvatermésének felét nyersen, másik felét pedig aszalt szilvaként adta el. Hány kg volt Kovács úr szilvatermése, ha a nyers és az aszalt szilvából összesen 286 000 Ft bevételhez jutott?

A piacon egy pénteki napon összesen 720 kg szilvát adtak el. Ez a mennyiség az alábbi kördiagram szerint oszlik meg az A, B, C és D fajták között.

c) Átlagosan mennyit fizettek a vevők egy kilogrammért az adott napon, ha az egyes fajták ára:

A – 120 Ft/kg, B – 200 Ft/kg, C – 230 Ft/kg, D – 260 Ft/kg.



6.		
a)		
10 kg leszedett szilvából kimagozás után 9,5 kg szilva lesz.	1 pont	
A 9,5 kg kimagozott szilvában 90% víz, míg 10%, azaz 0,95 kg a szárazanyag-tartalom.	1 pont	
A 10 kg nyers szilvából készült aszalt szilvában ez a 0,95 kg a feltétel szerint a tömeg 95%-a, hiszen csak 5%-a víz.	2 pont	*Ha kiderül, hogy a száraz-anyag-tartalom állandóságát felismerte, akkor jár a 2 pont.*
Tehát keressük, hogy hány kg-nak a 95%-a lesz 0,95 kg. Így adódik a 100%-ra 1 kg.	1 pont	
Azaz 10 kg szilvából valóban mindössze 1 kg aszalt szilva lesz.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	
A pontok akkor is járnak, ha a számolásból világosan kiderül a gondolatmenet.		

b)		
Ha x kg volt a termése, akkor a feltétel szerint: $\frac{x}{2}\cdot 120+\frac{x}{2}\cdot 0{,}1\cdot 1400=286000$.	2 pont	*Hibás egyenlet felírása elvi hibának minősül.*
$x=2200$ kg volt a termése.	1 pont	*Mértékegység nélkül ez a pont nem jár.*
Összesen:	**3 pont**	

<table>
<tr><td colspan="3">c)</td></tr>
<tr><td>A: 150° $\frac{150°}{360°}=\frac{5}{12}$ rész; (300 kg)
B: 90° $\frac{90°}{360°}=\frac{1}{4}$ rész; (180 kg)
C: 18° $\frac{18°}{360°}=\frac{1}{20}$ rész; (36 kg)
D: 102° $\frac{102°}{360°}=\frac{17}{60}$ rész. (204 kg)</td><td>4 pont</td><td>Az arányok megállapításáért vagy a mennyiségek kiszámításáért jár az 1-1 pont.</td></tr>
<tr><td>Az átlagár a súlyozott közép:
$\frac{120\cdot\frac{5\cdot720}{12}+200\cdot\frac{720}{4}+230\cdot\frac{720}{20}+260\cdot\frac{17\cdot720}{60}}{720}=$
$=\frac{1111}{6}\approx185{,}17.$</td><td>2 pont</td><td>Ha a megadott négy ár számtani közepét számolja, akkor nem kaphat pontot.</td></tr>
<tr><td>Tehát az átlagár kb. 185 Ft.</td><td>1 pont</td><td>Mértékegység nélkül ez a pont nem jár.</td></tr>
<tr><td align="right">Összesen:</td><td>7 pont</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Minden helyesen (egészre, tizedre) kerekített érték elfogadható.</td></tr>
</table>

3. Egy új típusú sorsjegyből 5 millió darab készült, egy sorsjegy ára 200 Ft. Minden egyes sorsjegyen vagy a „Nyert” vagy a „Nem nyert” felirat található, és a nyertes sorsjegyen feltüntetik a nyertes szelvény tulajdonosa által felvehető összeget is. A gyártás során a mellékelt táblázat szerinti eloszlásban készült el az 5 millió sorsjegy. (2012. október 16.)

sorsjegy (db)	nyeremény (Ft)
4	10 000 000
40	50 000
800	10 000
150 000	1 000
400 000	500
1 000 000	200
3 449 156	0

a) Ha minden sorsjegyet eladnának és a nyertesek minden nyereményt felvennének, akkor mekkora lenne a sorsjegyek eladásából származó bevétel és a kifizetett nyeremény különbözete?

b) Aki a kibocsátás után az első sorsjegyet megveszi, mekkora valószínűséggel nyer a sorsjegy áránál többet?

c) Számítsa ki, hogy ebben a szerencsejátékban az első sorsjegyet megvásárló személy nyereségének mennyi a várható értéke! (A nyereség várható értékének kiszámításához nemcsak a megnyerhető összeget, hanem a sorsjegy árát is figyelembe kell venni.)

1. a)		
A bevétel: $5\cdot10^6\cdot200\ (=10^9)$ (Ft).	1 pont	
A kifizetett nyeremény: $4\cdot10^7+2\cdot10^6+8\cdot10^6+1{,}5\cdot10^8+2\cdot10^8+2\cdot10^8$ $(=6\cdot10^8)$ (Ft),	1 pont	
tehát a különbözet 400 millió Ft.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

1. b)		
(Az 5 millió sorsjegy bármelyikét egyenlő valószínűséggel húzhatjuk.) A kedvező esetek száma 550 844,	2 pont	*Ha egyértelműen kiderül, hogy a vizsgázó jó számokat adott össze, de számolási hibát vétett, akkor 1 pontot kaphat.*
tehát a keresett valószínűség: $p=\frac{550844}{5\cdot10^6}\approx0{,}11$.	2 pont	*A 0,1 is elfogadható válasz. A százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.*
Összesen:	**4 pont**	

1. c) első megoldás		
A felvehető nyeremény várható értéke: $\frac{4\cdot10^7+2\cdot10^6+8\cdot10^6+1{,}5\cdot10^8+2\cdot10^8+2\cdot10^8}{5\cdot10^6}=$	2 pont	*Nem bontható.*
= 120 (Ft).	1 pont	
A nyereség várható értéke tehát (120 – 200 =) –80 Ft.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

1. c) második megoldás		
A sorsjegy kibocsátójának nyeresége a játékosok összes nyereségének ellentettje.	2 pont	
Egy játékos nyereségének várható értéke tehát $-\frac{400\,000\,000}{5\,000\,000}=$	1 pont	
= –80 Ft.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

<table>
<tr><td colspan="5">1. c) harmadik megoldás</td></tr>
<tr><td>nyeremény</td><td>nyereség</td><td>valószínűség</td><td rowspan="8">2 pont</td><td rowspan="8">Egy hiba esetén 1 pont jár, egynél több hiba esetén nem jár pont.</td></tr>
<tr><td>10 000 000</td><td>9 999 800</td><td>$\frac{4}{5\cdot 10^6}(=0{,}0000008)$</td></tr>
<tr><td>50 000</td><td>49 800</td><td>$\frac{40}{5\cdot 10^6}(=0{,}000008)$</td></tr>
<tr><td>10 000</td><td>9 800</td><td>$\frac{800}{5\cdot 10^6}(=0{,}00016)$</td></tr>
<tr><td>1 000</td><td>800</td><td>$\frac{150\,000}{5\cdot 10^6}(=0{,}03)$</td></tr>
<tr><td>500</td><td>300</td><td>$\frac{400\,000}{5\cdot 10^6}(=0{,}08)$</td></tr>
<tr><td>200</td><td>0</td><td>$\frac{10^6}{5\cdot 10^6}(=0{,}2)$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>–200</td><td>$\frac{3\,449\,156}{5\cdot 10^6}(=0{,}6898312)$</td></tr>
<tr><td colspan="3">A várható értéket az $E(X)=\sum_i x_i \cdot p_i$ képlet segítségével is kiszámíthatjuk.</td><td>1 pont</td><td>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</td></tr>
<tr><td colspan="3">A nyereség várható értéke –80 Ft.</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Összesen:</td><td>4 pont</td><td></td></tr>
</table>

4. Egy szobor márvány talapzatát egy 12 dm élű kocka alakú kőből faragják. Minden csúcsnál a csúcshoz legközelebbi élnegyedelő pontokat tartalmazó sík mentén lecsiszolják a kockát. (2008. október 28.)

a) A kész talapzatnak

• hány éle;

• hány csúcsa;

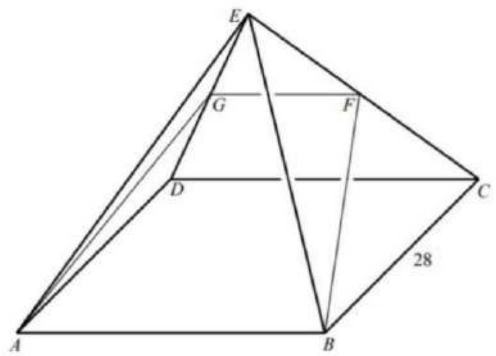
• hány lapja van?

b) A kész talapzatnak mekkora a felszíne?

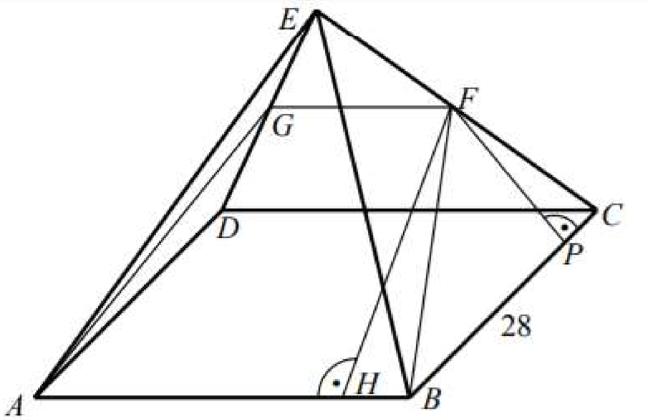
a) A lecsiszolt testnek **24** csúcsa van, mert a 8 kockacsúcs helyett minden csúcsnál 3-3 új csúcs keletkezik a negyedelő pontoknál (1 pont)
A lecsiszolt testnek 36 éle van, mert a 12 kocka élén maradnak élek, és a lemetszett háromszögek oldalai is élek: $8 \cdot 3 = 24$ és $12 + 24 = \mathbf{36}$ (1 pont)
A lapok száma 14, mert kockalapokból marad egy-egy nyolcszög és a lemetszett háromszögek száma 8, $6 + 8 = \mathbf{14}$ (1 pont)

b) A talapzat felszínét kiszámíthatjuk, ha a 6 db nyolcszög területéhez hozzáadjuk a 8 db szabályos háromszög területét. (1 pont)
A nyolcszög területe: a 12 dm oldalú négyzet területéből kivonjuk a 4 db egyenlő szárú derékszögű háromszög területét, vagyis 2 db 3 dm oldalú négyzet területét: $T_{\text{nyolcszög}} = 12^2 - 2 \cdot 3^2 = 126\ \text{dm}^2$ (2 pont)
A szabályos háromszög oldala $3 \cdot \sqrt{2}$, ezért $T_{\text{háromszög}} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{9 \cdot \sqrt{3}}{2}\ \text{dm}^2$ (2 pont)
$A = 6 \cdot T_{\text{nyolcszög}} + 8 \cdot T_{\text{háromszög}} = 756 + 36 \cdot \sqrt{3} \approx \mathbf{818{,}35\ dm^2}$ (1 pont)

5. Az ABCDE szabályos négyoldalú gúla alaplapja az ABCD négyzet. A gúla alapéle 28 egység hosszú. Legyen F a CE oldalélnek, G pedig a DE oldalélnek a felezőpontja. Az ABFG négyszög területe 504 területegység. Milyen hosszú a gúla oldaléle? (2008. október 28.)



8. első megoldás



GF középvonal a DCE háromszögben, így $GF = 14$ (egység).	1 pont	
Az $ABFG$ négyszög szimmetrikus trapéz,	1 pont	
mivel $AB \parallel CD \parallel FG$, és $AG = BF$ (szemközti, egymással egybevágó oldallapok megfelelő súlyvonalai).	1 pont	
Legyen HF a trapéz alapokhoz tartozó magassága. A trapéz területképlete alapján $\frac{28+14}{2} \cdot HF = 504$ (területegység),	1 pont	
tehát $HF = 24$ (egység).	1 pont	
A szimmetrikus trapéz tulajdonsága miatt $HB = \frac{28-14}{2} = 7$ (egység).	1 pont	
A HBF derékszögű háromszögben Pitagorasz-tételét alkalmazva: $BF^2 = 24^2 + 7^2$,	1 pont	
ahonnan $BF = 25$ (egység).	1 pont	
Az F pontból a BC oldalra bocsátott merőleges talppontja legyen P. Ez a pont a BC oldal C-hez legközelebbi negyedelő pontja.	2 pont	

A negyedelő pont indoklása: Például legyen Q a BC él felezőpontja. Az FP szakasz a EQC háromszög középvonala.	1 pont	
$BP = \frac{3}{4}BC = 21$ *és* $PC = \frac{1}{4}BC = 7$.	1 pont	
A BPF derékszögű háromszögben Pitagorasz-tételét alkalmazva: $PF^2 = 25^2 - 21^2 (= 184)$.	1 pont	
Az FPC derékszögű háromszögben Pitagorasz-tételét alkalmazva: $FC^2 = 184 + 7^2$,	1 pont	
így $FC = \sqrt{233} (\approx 15{,}26)$ (egység).	1 pont	
A gúla oldaléle $EC = 2 \cdot FC = 2 \cdot \sqrt{233} (\approx 30{,}53)$ (egység).	1 pont	*Bármely alakban megadott helyes érték 1 pont.*
Összesen:	**16 pont**	

(*Kettő másik módszer is van a megoldásra, amit nem néztünk meg, a megoldási útmutatóban meg tudjátok nézni őket.)*

6. Számrendszerek

• Ábrázold kettes számrendszerben a 639_{10}, 16-os számrendszerbe a 311_{10}, 8-as számrendszerbe a 483_{10} számot!

<u>Megoldás:</u>

/2	Maradék	/16	Maradék	/8	Maradék
639	1	311	7	483	3
319	1	19	3	60	4
159	1	1	1	7	7
79	1				
39	1				
19	1				
9	1				
4	0				
2	0				
1	1				

$639_{10} = 1001111111_2$ $311_{10} = 137_{16}$ $483_{10} = 743_8$

(Mi táblázatosan néztük meg, és csak az elsőt, létezik egy módszer egyébként, amivel könnyen lehet váltani a 2 hatványai között, azt érdemes megnézni. Pl. itt lehet találni egy módszert rá.)

• Ábrázold tízes számrendszerben a 2523_7 számot!

2523_7 a 10-es számrendszerbe átírva:

$$2523_7 = 2 \cdot 7^3 + 5 \cdot 7^2 + 2 \cdot 7^1 + 3 \cdot 1 = 948_{10}$$