BME TTK Érettségi Felkészítő 2022

III. Alkalom

Halmazok, halmazműveletek, logika és bizonyítási módszerek

2022. február 22.

Kidolgozós feladatok

1. Egy gimnázium egyik érettségiző osztályába 30 tanuló jár, közülük 16 lány. A lányok testmagassága centiméterben mérve az osztályozó naplóbeli sorrend szerint: (2009. május 5.)

166; 175; 156; 161; 159; 171; 167; 169; 160; 159; 168; 161; 165; 158; 170; 159

a) Számítsa ki a lányok testmagasságának átlagát! Mekkora az osztály tanulóinak centiméterben mért átlagmagassága egy tizedesjegyre kerekítve, ha a fiúk átlagmagassága 172,5 cm?

Ebben a 30 fős osztályban a tanulók három idegen nyelv közül választhattak, ezek az angol, német és francia.

b) Hányan tanulják mindhárom nyelvet, és hányan nem tanulnak franciát, ha tudjuk a következőket:

1. Minden diák tanul legalább két nyelvet.
2. Az angolt is és németet is tanuló diákok száma megegyezik a franciát tanuló diákok számával.
3. Angolul 27-en tanulnak.
4. A németet is és franciát is tanulók száma 15.

2. Anett és Berta egy írott szöveget figyelmesen átolvasott. Anett 24 hibát talált benne, Berta 30-at. Ezek között 12 hiba volt csak, amit mindketten észrevettek. Később Réka is átnézte ugyanazt a –javítatlan- szöveget, és ő is 30 hibát talált. Réka az Anett által megtalált hibákból 8-at vett észre, a Berta által észleltekből 11-et. Mindössze 5 olyan hiba volt, amit mind a hárman észrevettek. (2008. május 6.)

a) Együtt összesen a szöveg hány hibáját fedezték fel?

b) A megtalált hibák hány százalékát vették észre legalább ketten?

3. Legyen az U alaphalmaz a legalább 4 pontú egyszerű gráfok halmaza. Az F halmaz az U elemei közül pontosan azokat tartalmazza, amelyek fagráfok, a G halmaz pontosan azokat, amelyek összefüggő gráfok, a H halmaz pedig pontosan azokat, amelyek 6 pontú gráfok. (2019. október 6.)

166; 175; 156; 161; 159; 171; 167; 169; 160; 159; 168; 161; 165; 158; 170; 159

a) Az alábbi ábrán satírozással jelölje meg, és halmazműveletekkel is adja meg az U-nak azt a részhalmazát, amelyik üres halmaz!

b) A megadott Venn-diagram minden egyes további részébe rajzoljon pontosan egy lehetséges gráfot!

Egy telephely K, L, M, N, P, Q épületei közül az éjszakai ellenőrzés során ötöt ellenőriz a biztonsági őr.

c) Hányféleképpen tervezheti meg az útvonalát, ha K és L épületeket mindenképp ellenőrzi? (Két útvonal különböző, ha a két út során más épületeket, vagy ugyanazokat az épületeket, de más sorrendben ellenőriz a biztonsági őr.)

Megrajzoltuk a ABCDE konvex ötszög oldalait és átlóit, majd a megrajzolt szakaszok mindegyikét vagy kékre, vagy zöldre színeztük. A színezés befejezése után észrevettük, hogy nincs olyan háromszög, amelynek csúcsai az A, B, C, D, E pontok közül valók, és mindhárom oldala azonos színű.

d) Igazolja (például indirekt módszerrel), hogy nincs olyan csúcsa az ötszögnek, amelyből legalább három azonos színű szakasz indul ki!

4. Legyen az alaphalmaz a háromjegyű pozitív egész számok halmaza. Az A halamaz elemei azok a háromjegyű számok, amelyekben van 1-es, a B halmaz elemei azok, amelyekben van 2-es, a C halmaz elemei pedig azok, amelyekben van 3-as számjegy. (Studium Generale)

***a*)** Hány eleme van az $A\ (B \cap C)$ halmaznak?

Egy szerepjátékhoz használt dobókocka három lapján 3-as, két lapján 2-es, egy lapján 1-es szám van. A feldobott kocka mindegyik lapjára egyforma valószínűséggel esik.

***b*)** Két ilyen dobókockával egyszerre dobva mennyi a valószínűsége annak, hogy a dobott számok összeg 4 lesz?

Andi és Béla a következő játékot játsszák ezzel a dobókockával. Valamelyikük dob egyet a kockával. Ha a dobás eredménye 3, akkor Andi fizet Bélának n forintot (n 80); ha a dobás eredménye 1, akkor Béla fizet (n 80) forintot Andinak; ha pedig a dobás eredménye 2, akkor is Béla fizet Andinak 2(n 80) forintot.

***c*)** Mennyit fizet Béla Andinak az 1-es dobása esetén, ha ez a játék igazságos, azaz mindkét játékos nyereményének várható értéke 0?

5. (2021. május 4.)

***a*)** Határozza meg az m valós szám összes lehetséges értékét úgy, hogy az alábbi kijelentés igaz legyen! Az $x^2 - 2x + 4 = mx$ egyenletnek pontosan két különböző valós gyöke van.

***b*)** Mutassa meg, hogy az alábbi kijelentés igaz!

Az $f : R \longrightarrow R; f(x) = \frac{3}{(1+cosx)^2+2}$ függvény értékkészlete az $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$ intervallum.

***c*)** Tudjuk, hogy az A, B, C kijelentések mindegyike 0,6 valószínűséggel igaz és 0,4 valószínűséggel hamis. Ebben az esetben mennyi annak a valószínűsége, hogy (A ∪ B) ∪ C kijelentés igaz?

6. Egy város 18 étterme közül 11-ben reggelit, 11-ben vegetáriánus menüt lehet kapni, és 10-ben van felszolgálás. Mind a 18 étterem legalább egy szolgáltatást nyújt az előző három közül. Öt étteremben adnak reggelit, de nincs vegetáriánus menü. Azok közül az éttermek közül, ahol reggelizhetünk, ötben van felszolgálás. Csak egy olyan étterem van, ahol mindhárom szolgáltatás megtalálható. (Studium Generale)

a) Hány étteremben lehet vegetáriánus menüt kapni, de reggelit nem?

b) Hány olyan étterem van, ahol felszolgálnak vegetáriánus menüt?

c) A Kiskakas étteremben minden vendég a fizetés után nyereménysorsoláson vehet részt. Két urnát tesznek elé, amelyekben golyócskák rejtik a város egy-egy éttermének nevét. Az A urnában a város összes vendéglőjének neve szerepel, mindegyik pontosan egyszer. A B urnában azoknak az éttermeknek a neve található, –mindegyik pontosan egyszer– amelyikben nincs felszolgálás. A vendég tetszés szerint húzhat egy golyót. Ha a húzott étteremben van reggelizési lehetőség, akkor a vendég egy heti ingyen reggelit nyer, ha nincs, nem nyer. Melyik urnából húzva nagyobb a nyerés valószínűsége?