BME TTK Érettségi Felkészítő 2022

I. Alkalom

Racionális és irracionális számok, oszthatóság, számrendszerek

2022. március 2.

Kidolgozós feladatok

1. Az alábbi három kifejezés mindegyike esetén adja meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a kifejezés értelmezhető! (2012. október 16.)

a) $\cos(\log_2\sqrt{x})$

b) $\sqrt{\log_2(\cos x)}$

c) $\log_{\sqrt{x}}(\cos^2 x)$

a, $\mathbb{R}$ - en, valós számok → négyzetgyök miatt $x \geq 0$

logaritmus miatt : $\sqrt{x} > 0$

$\left.\right\}$ $x > 0$ // vagy $x \in]0;+\infty[$ //

---

b, valós számok → négyzetgyök miatt ismét: $\log_2(\cos x) \geq 0$

$\downarrow$ log. def.

$\cos x \geq 2^0 = 1$

logaritmus miatt : $\left.\begin{matrix}\cos x > 0 \\ \cos x \geq 1\end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x = 1$ ($\cos x \in [-1;1]$) Azaz $x = 2k \cdot \pi$ $k \in \mathbb{Z}$ //

---

c, logaritmus alapja miatt: $\underline{x > 0}$ $\underline{x \neq 1}$

logaritmus miatt : $\cos^2 x > 0$

$\left.\right\}$ $\cos x \neq 0$

$\downarrow$ hol 0?

$\underline{x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi}$ $k \in \mathbb{Z}$

Az az $x > 0$; $x \neq 1$ és $x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ $k \in \mathbb{Z}$

vagy $\mathbb{R}^+ \setminus \left(\{1\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\right\}\right)$ $k \in \mathbb{Z}$

2. (2013. május 7.)

a) Egy bank olyan hitelkonstrukciót ajánl, amelyben napi kamatlábat számolnak úgy, hogy az adott hitelre megállapított éves kamatlábat 365-tel elosztják. Egy adott évben a hitelfelvételt követően minden napra kiszámolják a napi kamat értékét, majd ezeket december 31-én összeadják és csak ekkor tőkésítik (azaz a felvett hitel értékéhez adják). Ez a bank egy adott évben évi 8%-os kamatlábat állapított meg. Éva abban az évben a március 1-jén felvett 40 000 Ft után október 1-jén újabb 40 000 Ft hitelt vett fel. A két kölcsön felvétele után mennyi kamatot tőkésít a bank december 31-én? (A hitelfelvétel napján és az év utolsó napján is számítanak napi kamatot.)

b) Ádám is vett fel hiteleket ettől a banktól évi 8%-os kamatos kamatra. Az egyik év január 1-jén éppen 1 000 000 Ft tartozása volt. Több hitelt nem vett fel, és attól kezdve 10 éven keresztül minden év végén befizette az azonos összegű törlesztőrészletet. (A törlesztőrészlet összegét a bank már az éves kamattal megnövelt tartozásból vonja le.) Mekkora volt ez a törlesztőrészlet, ha Ádám a 10 befizetés után teljesen visszafizette a felvett hitelt? Válaszát ezer forintra kerekítve adja meg!

a, Az éves kamatláb 8% $\Longrightarrow$ a napi kamatláb $\frac{8}{365}$ %

Hogy számolja a ~~batt~~ bank a tőkésítést? (felvett összeg) $\cdot \frac{8}{365} \cdot \frac{1}{100} \cdot (\quad)$

(eltelt napok)

Számoljuk külön a két ~~hitel kamatát~~ kamatot.

1. hitel, márc. 1. $\longrightarrow$ eltelt napok $= 365 - 31 - 28 = 306$

$$40000 \text{ Ft} \cdot \frac{8}{365} \cdot \frac{1}{100} \cdot 306 = 2682{,}74 \approx 2683 \text{ Ft}$$

2. hitel, okt. 1 $\longrightarrow$ eltelt napok $= 31 + 30 + 31 = 92$

$$40000 \text{ Ft} \cdot \frac{8}{365} \cdot \frac{1}{100} \cdot 92 = 806{,}58 \text{ Ft} \approx 807 \text{ Ft}$$

$\Sigma = 2683 \text{ Ft} + 807 \text{ Ft} = \underline{\underline{3490 \text{ Ft}}}$ kamatot tőkésít a bank

b, Össz. tartozás 1000000 Ft és 10-szer fizetett év végén

$$\Longrightarrow (\ldots((1\,000\,000 \cdot 1{,}08 - x) \cdot 1{,}08 - x) \ldots) \cdot 1{,}08 - x = 0$$

$$1\,000\,000 \cdot 1{,}08^{10} - x \cdot \underbrace{(1{,}08^9 + 1{,}08^8 + \ldots 1{,}08 + 1)}_{\text{mértani sorozat}} = 0$$

mértani sorozat: $a_1 = 1$, $q = 1{,}08$

Összegképlet alapján

$$S_{10} = \frac{1{,}08^{10} - 1}{1{,}08 - 1} \approx 14{,}487$$

$$x = \frac{1\,000\,000 \cdot 1{,}08^{10}}{S_{10}} \approx 149\,025$$

$\Longrightarrow$ Az évi törlesztőrészlet így 149000 Ft volt Ádámnak.

3. A Robotvezérelt Elektromos Kisautók Nemzetközi Versenyén a versenyzők akkumulátorral hajtott modellekkel indulnak. A magyar versenyautó az első órában 45 kilométert tesz meg. Az akkumulátor teljesítményének csökkenése miatt az autó a második órában kevesebb utat tesz meg, mint az első órában, a harmadik órában kevesebbet, mint a másodikban, és így tovább: az indulás utáni n-edik órában megtett útja mindig 95,5%-a az (n − 1)-edik órában megtett útjának ($n \in \mathbb{N}$ és $n > 1$). (2012. október 16.)

a) Hány kilométert tesz meg a 10. órában a magyarok versenyautója? Válaszát egész kilométerre kerekítve adja meg!

A versenyen több kategóriában lehet indulni. Az egyik kategória versenyszabályai lehetővé teszik az akkumulátorcserét verseny közben is. A magyar csapat mérnökei kiszámították, hogy abban az órában még nem érdemes akkumulátort cserélni, amelyikben az autó legalább 20 km-t megtesz.

b) Az indulástól számítva legkorábban hányadik órában érdemes akkumulátort cserélni?

A „Végkimerülés" kategóriában a résztvevők azon versenyeznek, hogy akkumulátorcsere és feltöltés nélkül mekkora utat tudnak megtenni az autók. A világrekordot egy japán csapat járműve tartja 1100 km-rel.

d) Képes-e megdönteni a magyar versenyautó a világrekordot a „Végkimerülés" kategóriában?

a, A megtett úthosszakat felírhatjuk úgy, mint egy mértani sorozat

$n \in \mathbb{N}$ $n > 1$ $a_1 = 45$ $q = 0{,}955$

$a_{10} = a_1 \cdot q^9 = 45 \cdot 0{,}955^9 \approx 29{,}433$ → mértani sorozat képlet alapján

⇒ A magyarok versenyautója a 10. órában 30km-t tesz meg.

b, írjuk fel az egyenlőtlenséget $45 \cdot 0{,}955^{n-1} \geq 20$

$0{,}955^{n-1} \geq \frac{20}{45}$

↳ ha ez teljesül, nem kell cserélni

$\lg (0{,}955)^{n-1} \geq \lg \frac{20}{45} \rightarrow (n-1)\lg(0{,}955) \geq \lg \frac{20}{45}$

$\lg(0{,}955) < 0$ mivel $0{,}955 < 1$
↓
ha osztunk vele akkor fordul a reláció

$n-1 \leq \dfrac{\lg \frac{20}{45}}{\lg(0{,}955)} = 17{,}612$

$n \leq 18{,}612$ //

⇒ magyarán a 18. órában még teljesül de a 19. órában ~~még nem~~ már nem

↳ legkorábban a 19. órában érdemes cserélni

4. Mutassa meg, hogy a $2\cdot 8^x + 7\cdot 4^x + 3\cdot 2^x = 0$ egyenletnek nincs valós gyöke! (2014. május 6.)

Elmélet: Az exponenciális függvény értékkészlete az $\mathbb{R}^+$

↳ sose lesz 0 vagy negatív ha $x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow 2\cdot 8^x > 0$, $7\cdot 4^x > 0$; ~~és~~ $3\cdot 2^x > 0 \Rightarrow$ összegük > 0

→ nincs valós megoldás

Gyja Máik megoldás: - Ez a gondolatmenet sok más feladatnál hasznos lehet.

$2^x \stackrel{!}{=} y$ $\qquad y\cdot(2y^2 + 7y + 3) = 0$

vagy

$y = 0$ $\qquad 2y^2 + 7y + 3 = 0$

$2^x = 0$ ↯ ellentmondás $\qquad y_{1,2} = \dfrac{-7 \pm \sqrt{49 - 4\cdot 2\cdot 3}}{4}$ $\quad y_1 = -\frac{1}{2}$, $\quad y_2 = -3$

egyik se teljesülhet:

↳ nincs valós megoldás $\qquad 2^x = -\frac{1}{2} \qquad 2^x = -3$ ↯

---

c, Ha a magyar autó n órát megy, akkor az általa megtett út a mértani sorozat első n tagból álló részletösszege

$S_n = a_1 \dfrac{q^n - 1}{q-1} = 45\cdot \dfrac{0{,}955^n - 1}{0{,}955 - 1}$ → a kérdés az, hogy

$\dfrac{45\cdot(0{,}955^n - 1)}{0{,}955 - 1} > 1100$ teljesül-e valamilyen n-re?

$|q| < 1 \Rightarrow$ konvergens a sorozat

$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$ ha $|q| < 1$

és S_n szig. mon. növekvő

nincs negatív a_n

$\lim_{n\to\infty} S_n = 45\cdot \dfrac{1}{1-q} = \dfrac{45}{0{,}045} = 1000$

$\Rightarrow$ a magyar autó nem tudja megdönteni a világrekordot.

van más megoldás is

5. $25^{\lg(x)} = 5 + 4 \cdot 5^{\lg(x)}$ **(2014. október 14.)**

Értelmezési tartomány:

logaritmus miatt $x > 0$

$x \in \mathbb{R}$

$25^{\lg(x)} = (5^2)^{\lg(x)} = (5^{\lg(x)})^2$

$\Rightarrow (5^{\lg(x)})^2 = 5 + 4 \cdot 5^{\lg(x)}$ $\qquad 5^{\lg(x)} \overset{!}{=} y$

$y^2 = 5 + 4y$

$y^2 - 4y - 5 = 0 \Rightarrow \qquad y_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 4 \cdot 5 \cdot 1}}{2}$ $\quad y_1 = 5$, $\quad y_2 = -1$

y_2 hamis gyök, $5^{\lg(x)} = -1$ nem lehetséges

$y_1 = 5^{\lg(x)} = 5^1 \Rightarrow \lg(x) = 1 \Rightarrow x = 10^1 = 10$ //

Ell:

$25^{\lg(10)} = 5 + 4 \cdot 5^{\lg(10)}$

$25^1 = 5 + 4 \cdot 5^1$ ✓ //

6. Egy kereskedőcég bevételei két forrásból származnak: bolti árusításból és internetes eladásból. Ebben az évben az internetes árbevétel 70%-a volt a bolti árbevételnek. A cég vezetői arra számítanak, hogy a következő években az internetes eladásokból származó árbevétel évente az előző évi internetes árbevétel 4%-ával nő, a bolti eladásokból származó árbevétel viszont évente az előző évi bolti árbevétel 2%-ával csökken.
Számítsa ki, hány év múlva lesz a két forrásból származó árbevétel egyenlő!
(2014. október 14.)

Idei bolti eladások értéke x forint ⇒ internetes eladások értéke 0,7x Ft

y ahány év múlva bekövetkezik az egyenlőség

$\cancel{1{,}04^y \cdot 0{,}7}$ $\quad 1{,}04^y \cdot 0{,}7x = 0{,}98^y \cdot x \quad / : x \quad x \neq 0$

$$1{,}04^y \cdot 0{,}7 = 0{,}98^y$$

$\left(\frac{0{,}98}{1{,}04}\right)^y = 0{,}7$ $\quad$ (~~logaritmáljuk~~) vesszük a két oldal logaritmusát

$$\lg\left(\frac{0{,}98}{1{,}04}\right)^y = \lg 0{,}7$$

$$y \cdot \lg\left(\frac{0{,}98}{1{,}04}\right) = \lg(0{,}7) \Rightarrow y = \frac{\lg(0{,}7)}{\lg\left(\frac{0{,}98}{1{,}04}\right)} \approx 6{,}0023 \approx 6$$

A két forrásból származó összeg 6 év múlva lesz egyenlő

Ell.: $\quad 1{,}04^6 \cdot 0{,}7b = 0{,}8857b \approx 0{,}886b$ //

$\quad 0{,}98^6 b = 0{,}8858b \approx 0{,}886b$ //

7. Egy pénzintézet a tőle felvett H forint összegű hitel visszafizetésekor havi p%-os kamattal számol ($p > 0$), ezért az adós havi törlesztőrészletét a $t_n = H \cdot \frac{q^n(q-1)}{q^n-1}$ képlettel számítja ki (minden hónapban ekkora összeget kell visszafizetni). A képletben $q = 1 + \frac{p}{100}$, az n pedig azt jelenti, hogy összesen hány hónapig fizetjük a törlesztőrészleteket (ez a hitel futamideje). (2015. május 5.)

a) Fogyasztási cikkek vásárlására 1,6 millió forint hitelt vettünk fel a pénzintézettől; a havi kamat 2%. Összesen hány forintot fizetünk vissza, ha 72 hónap alatt törlesztjük a felvett hitelt? Válaszát ezer forintra kerekítve adja meg!

b) Legkevesebb hány hónapos futamidőre vehetünk fel egy 2 millió forintos hitelt, ha legfeljebb 60 ezer forintot tudunk havonta törleszteni, és a havi kamat 2%-os?

c) Számítsa ki a $\lim\limits_{n\to\infty} t_n$ határértéket, ha $q = 1{,}02$ és $H = 2000000$.

a,

$H = 1\,600\,000 = 1{,}6 \cdot 10^6 \qquad p = 2\% \qquad q = 1 + \frac{p}{100} = 1{,}02$

$n = 72$

$$t_n = H \cdot \frac{q^n(q-1)}{q^n - 1}$$

itt $t_{72} = 1{,}6 \cdot 10^6 \cdot \frac{1{,}02^{72} \cdot (1{,}02 - 1)}{1{,}02^{72} - 1} = 42122{,}93$ Ft lesz a havi törlesztés

$\underbrace{72 \cdot 42122{,}93 \text{ Ft}}$ lesz a teljes visszafizetett összeg

$= 3\,032\,850{,}96$ Ft $\approx 3\,033\,000$ Ft -ot fizetünk vissza //

b,

legkevesebb hány hónap? → n legyen min. $\qquad H = 2 \cdot 10^6$

$p = 2\% \qquad q = 1{,}02$

$t_n \leq 60000$

$$2 \cdot 10^6 \cdot \frac{1{,}02^n \cdot 0{,}02}{1{,}02^n - 1} \leq 60000$$

$1{,}02^n \geq 1 \quad \forall\, n$-re

$1{,}02^n - 1 \geq 0$ → bővíthetünk vele

$1{,}02^n \cdot 0{,}02 \leq 0{,}03\,(1{,}02^n - 1)$

$0{,}03 \leq 0{,}01 \cdot 1{,}02^n$

$3 \leq 1{,}02^n$ ← 10-es alapú ~~logari~~ logaritmus szig. mon. növő

$\lg 3 \leq \lg(1{,}02^n)$

$\cancel{n \geq \frac{\lg(1{,}02)}{\lg 3}}$

$n \geq \frac{\lg 3}{\lg(1{,}02)} = 55{,}478$

n legyen min.

Ezekkel a feltételekkel legalább 56 hónapos futamidőt kell választanunk //

8. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert, ahol x és y pozitív valós számok! (2017. május 9.)

$$\left.\begin{array}{l} x+y=0{,}2 \\ \frac{\lg(x)+\lg(y)}{2}=\lg(\frac{x+y}{2}) \end{array}\right\} \rightarrow \quad x=0{,}2-y \rightarrow \text{helyettesítsük be a másodikba}$$

$$\frac{\lg(0{,}2-y)+\lg y}{2}=\lg 0{,}1=-1 \quad /\cdot 2$$

log azonosság összeadásra

$$\lg((0{,}2-y)y)=-2$$

log. def.

$$(0{,}2-y)y=10^{-2}=0{,}01$$

$$\Rightarrow \quad 0{,}2y-y^2=0{,}01 \Rightarrow \quad y^2-0{,}2y+0{,}01=0$$

$$y_{1,2}=\frac{0{,}2\pm\sqrt{0{,}04-0{,}04}}{2}=0{,}1$$

$$\Rightarrow \quad x=0{,}2-y=0{,}1$$

Ell: $0{,}1+0{,}1=0{,}2$ ✓

$$\frac{\lg(0{,}1)+\lg(0{,}1)}{2}=\lg(0{,}1)$$

$$\frac{\lg(0{,}1)^2}{2}=\frac{2\cdot\lg(0{,}1)}{2}=\lg(0{,}1) \quad ✓$$

---

c) $\lim\limits_{n\to\infty} t_n=?$ $\quad H=2\cdot 10^6 \quad q=1{,}02 \quad |q|>1$

$$\lim_{n\to\infty} t_n=\lim_{n\to\infty} H\cdot(q-1)\cdot\frac{q^n}{q^n-1}=\lim_{n\to\infty} H\cdot(q-1)\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{q^n}}=$$

$$=H\cdot(q-1)\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{q^n}}=2\cdot10^6\cdot0{,}02\cdot\frac{1}{1-0}=40000$$

$\frac{1}{q^n}\to 0$ ha $n\to\infty$ mivel $q^n\to\infty$ ha $n\to\infty$

9. Egy baktériumtenyészet szaporodását laboratóriumi körülmények között vizsgálják. Az első órában 4 mikrocellát fertőznek meg baktériumokkal. A második órában a baktériumok szaporodni kezdenek, így további 3 cella fertőződik meg. A megfigyelés szerint ezután „szabályszerűvé" válik a baktériumok szaporodása: minden órában annyi új fertőzött cella keletkezik, ahány korábban összesen volt. (A harmadik órában $4 + 3 = 7$ új fertőzött mikrocella keletkezik, a negyedik órában 14, és így tovább.) (2017. május 9.) Ha a baktériumok szaporodásához továbbra is biztosítanák a megfelelő körülményeket, akkor az összes fertőzött mikrocella száma hányadik órában haladná meg a tízmilliót?

A második órában 7 fertőzött cella van

és onnantól mindig duplázódik

miuel a 3. órától van szabályszerűség

n. órában a fertőzött cellák száma: $7 \cdot 2^{n-2}$

A kérdés így: $7 \cdot 2^{n-2} > 10^7$

mindkét oldal logaritmusát vesszük, a 10-es alapú logaritmus szig. mon. nővő

$$2^{n-2} > \frac{10^7}{7}$$

$$(n-2) \cdot \lg 2 > \lg \frac{10^7}{7}$$

$$n-2 > \frac{\lg \frac{10^7}{7}}{\lg 2} \approx 20{,}45$$

$n > 22{,}45 \Rightarrow$ A fertőzött cellák száma a 23. órában haladnák meg a 10 milliót

10. (2018. október 16.)

a) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$25\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{x}-50\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{x+1}+30\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{x+2}=81$$

b) Igazolja, hogy $\frac{\lg(5^x)+\lg(5^{-x})}{2}\le\lg\left(\frac{5^x+5^{-x}}{2}\right)(x\in\mathbf{R})$

a,

$$\underbrace{25}_{\frac{125}{5}}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{x}-\underbrace{50\cdot\frac{1}{5}}_{10=\frac{50}{5}}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{x}+\underbrace{30\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{2}}_{\frac{30}{25}=\frac{6}{5}}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{x}=81$$

$$\left(\frac{125}{5}-\frac{50}{5}+\frac{6}{5}\right)\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{x}=81$$

$$\frac{81}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^{x}=81$$

az exponenciális függvény kölcsönös egyértelműsége miatt

$$5^{-x}=5^{1}\implies x=-1$$

bijektív

szürjektív + injektív

Ell:

$$\underbrace{25\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}}_{5^{1}}-50\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{5}\right)^{-1+1}}_{\left(\frac{1}{5}\right)^{0}=1}+30\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{5}\right)^{-1+2}}_{\left(\frac{1}{5}\right)^{+1}}\overset{?}{=}81$$

$$25\cdot5-50\cdot1+\frac{30}{5}=81\ \checkmark$$

b, $x\in\mathbb{R}$ log. miatt 5^x és $5^{-x}>0$ bár ez teljesül amúgy is

log. azonosság miatt $\Rightarrow\ \frac{\lg(5^x\cdot5^{-x})}{2}\le\lg\left(\frac{5^x+5^{-x}}{2}\right)$

$$\frac{\lg 1}{2}\le\lg\left(\frac{5^x+5^{-x}}{2}\right)$$

$$0\le\lg\left(\frac{5^x+5^{-x}}{2}\right)$$

lg szig. mon. növő

log. def.

$$\Downarrow$$

$$1\le\frac{5^x+5^{-x}}{2}$$

$$\underbrace{5^x+5^{-x}}\ge2$$

egymás reciprokai, összegük legalább 2

(vagy $0\le(5^x-1)^2$)

csak ekvivalens átalakításokat végeztünk, így az állítás igaz.

11. Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán! (2019. május 7.)

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1}+\left(\frac{1}{9}\right)^{x+1}=324$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} = \underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^{1}}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} \qquad\qquad \left(\frac{1}{9}\right)^{x+1} = \underbrace{\left(\frac{1}{9}\right)^{1}}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{x}$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{x} \qquad\qquad \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\right)^{x} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1}+\left(\frac{1}{9}\right)^{x+1} = \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right)\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{x} = \frac{4}{9}\left(\frac{1}{9}\right)^{x} = 324$$

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{x} = 729 = 9^{3}$$

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{x} = 9^{3}$$

$$9^{-x} = 9^{3} \Rightarrow x = -3$$

Az exponenciális függvény kölcsönös egyértelműsége miatt

<u>Ell:</u> $\left(\frac{1}{3}\right)^{2\cdot(-3)+1} + \left(\frac{1}{9}\right)^{-3+1} = 324$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-5} + \left(\frac{1}{9}\right)^{-2} = 3^{5} + 9^{2} = 243 + 81 = 324 \checkmark$$

---

12. Hány olyan egész szám van, amelyik gyöke az alábbi egyenlőtlenségnek? (2019. október 15.)

$$\log_{0,5}(2x + 100) \geq -8$$

Értelmezési tartomány a logaritmus miatt: $2x+100>0$

$x>-50$

$x \in \mathbb{R}$

logaritmus def. alapján: $\cancel{(2x+100 \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{-8} = 2^{8} = 256)}$

$2x+100 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-8} = 2^{8} = 256$

↑

fordul a reláció, mivel a logaritmus alap <1 $\Rightarrow$ szig. mon. csökken a fv.

$\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} 2x \leq 156 \\ x \leq 78 \\ x > -50 \end{array}\right\} \Rightarrow$ 128 olyan egész szám van ami gyöke az egyenlőtlenségnek //

13. (2019. október 15.)

a) Igazolja, hogy nincs olyan 2-nél nagyobb n egész szám, melyre $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$ és $\binom{n}{3}$ (ebben a sorrendben) egy mértani sorozat egymást követő tagjai!

b) Határozza meg azokat az 5-nél nagyobb n egész számokat, melyekre $\binom{n}{4}$, $\binom{n}{5}$ és $\binom{n}{6}$ (ebben a sorrendben) egy számtani sorozat egymást követő tagjai!

a, Indirekt: Tfh, létezik ilyen n egész szám

Ha $\exists$ ilyen $n \geq 3$ szám, akkor

A mértani sorozat tulajdonságai miatt $\binom{n}{1}\binom{n}{3} = \binom{n}{2}^2$

$$\left(\begin{array}{c} (a_1 q^n)(a_1 \cdot q^{n+2}) = (a_1 q^{n+1})^2 \\ a_1^2 \cdot q^{2n+2} = a_1^2 q^{2n+2} \end{array} \right)$$

$$\binom{n}{1}\binom{n}{3} = \underbrace{n \cdot \frac{n!}{3!(n-3)!}}_{n \cdot \frac{1}{3!} \cdot \frac{n!}{(n-3)!}} = \binom{n}{2}^2 = \underbrace{\frac{n!}{2!(n-2)!}}_{\frac{1}{2!} \cdot \frac{n!}{(n-2)!}} \cdot \underbrace{\frac{n!}{2!(n-2)!}}$$

$$n \cdot \frac{1}{3!} \cdot \underbrace{\frac{n!}{(n-3)!}}_{n \frac{1}{6} \cdot n(n-1)(n-2)} \qquad \frac{1}{2!} \cdot \underbrace{\frac{n!}{(n-2)!}}_{\frac{1}{2} \cdot n(n-1)}$$

$$\Rightarrow \quad n \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} \quad / : n(n-1)$$

$$\frac{n(n-2)}{6} = \frac{n(n-1)}{4} \quad / : n$$

$$\frac{n-2}{6} = \frac{n-1}{4} \Rightarrow 4n-8 = 6n-6$$

$$n = -1$$ ↯ ellentmondás az alap feltevéssel

$\Rightarrow \nexists$ ilyen n /

b, számtani sorozat tulajdonságai miatt

$$\binom{n}{4}+\binom{n}{6} = 2\binom{n}{5} \quad \longleftarrow \quad (a_1+nd)+(a_1+(n+2)d) = \cancel{2a_1}$$

$$= 2a_1 + (2n+2)d =$$

$$= 2(a_1+(n+1)d)$$

Fejtsük ki a binomiális együtthatókat!

$$\frac{n!}{(n-4)!\cdot 4!} \cdot \frac{n!}{(n-6)!\,6!} = 2\cdot\frac{n!}{(n-5)!\,5!} \qquad \Big/ : n!\cdot 6! \left(= \cdot \frac{6!}{n!}\right)$$

$$\frac{5\cdot 6}{(n-4)!} \cdot \frac{1}{(n-6)!} = \frac{2\cdot 6}{(n-5)!} \qquad \Big/ \cdot (n-4)!$$

$$30 + (n-4)(n-5) = 12(n-4)$$

$$30 + n^2 - 9n + 20 = 12n - 48$$

$$n^2 - 21n + 98 = 0 \longrightarrow n_{1,2} = \frac{21 \pm \sqrt{441 \pm 392}}{2} \quad \begin{matrix} \nearrow n_1 = 14 \\ \searrow n_2 = 7 \end{matrix}$$

Ellenőrzés mindkét n-re: (számológéppel)

$n_1 = 14$

$$\binom{14}{4} = 1001\,;\ \binom{14}{5} = 2002\,;\ \binom{14}{6} = 3003 \qquad (d = 1001)$$

$$\binom{7}{4} = 35\,;\ \binom{7}{5} = 21\,;\ \binom{7}{6} = 7 \qquad (d = -14)$$