BME TTK Érettségi Felkészítő 2022

IV. Alkalom
Függvényelemzés, deriválás és integrálás

2022. március 16.

Kidolgozós feladatok

1. Egy kozmetikumokat gyártó vállalkozás nagy tételben gyárt egyfajta krémet. A termelés teljes havi mennyisége (x kilogramm) 100 és 700 kg közé esik, amelyet egy megállapodás alapján a gyártás hónapjában el is adnak egy nagykereskedőnek. A megállapodás azt is tartalmazza, hogy egy kilogramm krém eladási ára: $(36 - 0{,}03x)$ euró. A krémgyártással összefüggő havi kiadás (költség) is függ a havonta eladott mennyiségtől. A krémgyártással összefüggő összes havi kiadást (költséget) a $0{,}0001x^3 - 30{,}12x + 13000$ összefüggés adja meg, szintén euróban. (2010. október 19.)

a) Számítsa ki, hogy hány kilogramm krém eladása esetén lesz az eladásból származó havi bevétel a legnagyobb! Mekkora a legnagyobb havi bevétel?

b) Adja meg a krémgyártással elérhető legnagyobb havi nyereséget! Hány kilogramm krém értékesítése esetén valósul ez meg? *(nyereség=bevétel–kiadás)*

2. Legyen p valós paraméter. Tekintsük a valós számok halmazán értelmezett f függvényt, amelynek hozzárendelési szabálya $f(x) = -3x^3 + (p-3)x^2 + p^2x - 6$ (2012. május 8.)

a) Számítsa ki a $\int_0^2 f(x)\,dx$ határozott integrált, ha $p = 3$.

b) Határozza meg p értékét úgy, hogy az $x = 1$ zérushelye legyen az f függvénynek!

c) Határozza meg p értékét úgy, hogy az f függvény deriváltja az $x = 1$ helyen pozitív legyen!

3. Egy teherszállító taxikat üzemeltető társaság egyik, elsősorban városi forgalomban alkalmazott kocsijának teljes működtetési költsége két részből tevődik össze: (2013. október 15.)

- az üzemeltetési költség $x\frac{\text{km}}{\text{h}}$ átlagsebesség esetén $400 + 0{,}8x$ Ft kilométerenként;
- a gépkocsivezető alkalmazása 2200 Ft óránként.

a) Mekkora átlagsebesség esetén minimális a kocsi kilométerenkénti működtetési költsége? Válaszát $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ -ban, egészre kerekítve adja meg!

b) A társaság emblémájának alaprajzát az f és $-f$ függvények grafikonjai által közrezárt síkidommal modellezhetjük, ahol

$$f : [0{,}6] \to \boldsymbol{R}, f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{ha } x \in [0;4] \\ \frac{x^2-12x+36}{2}, & \text{ha } x \in]4;6] \end{cases}$$

Számítsa ki az embléma modelljének területét!

4. (2014. május 6.)

a) Deriváltfüggvényének segítségével elemezze az $f :]-2;3] \to \boldsymbol{R}$; $f(x) = x^3 - 1{,}5x^2 - 6x$ függvényt a következő szempontok szerint: növekedés és fogyás, lokális szélsőértékek helye és értéke!

b) Adja meg azt a $g :]-2;3] \to \boldsymbol{R}$ függvényt, amelyre igaz, hogy $g' = f$ (tehát az f függvény a g deriváltfüggvénye), és ezen kívül $g(2) = 0$ is teljesül!

5. Adott a síkbeli derékszügű koordináta-rendszerben az $y = 3x^2 - x^3$ egyenletű görbe. (2014. október 14.)

a) Igazolja, hogy ha $x \in]0;3[$, akkor $y > 0$.

b) Írja fel a görbe 3 abszcisszájú pontjában húzható érintőjének egyenletét! (abszcissza: első koordináta)

c) Számítsa ki annak a síkidommnak a területét, amelyet a görbe első síknegyedbe eső íve és az x tengely fog közre!

6. Adott az f és g függvény: (2015. május 5.)
$f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}; f(x) = 2x + 1;$
$g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}; g(x) = x^3 - 2.$

***a*)** Számítsa ki a $2f + g$ függvény zérushelyeit!

***b*)** Számítsa ki az f és g függvények által közbezárt területet!

***c*)** Számítással igazolja, hogy a $h :]-\infty; -0{,}5[\to \boldsymbol{R}; h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$ függvény szigorúan monoton növekvő!

7. Adott az $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}; f(x) = x^4 + 8x^3 - 270x^2 + 275$ függvény. (2015. október 13.)

a) Igazolja, hogy $x = -15$-ben abszolút minimuma, $x = 0$-ban abszolút maximuma, $x = 9$-ben lokális minimuma van a függvénynek!

b) Igazolja, hogy f konkáv a $]-9; 5]$ intervallumon!

c) ANewton-Leibniz-tétel segítségével határozza meg a $\int_0^5 f(x)\,dx$ határozott integrál értékét!

8. Adott a valós számok halmazán értelmezett f és g függvény:

$$f(x) = x^2 - 2 \text{ és } g(x) = 10 + 10x - x^2$$

(2016. október 18.)

a) Oldja meg a valós számok halmazán az $| f(x) + g(x) | \geq 8$ egyenlőtlenséget!

b) Igazolja, hogy a $[2; 8]$ intervallumon az f és g függvény is csak pozitív értéket vesz fel!

c) Határozza meg azt a t valós számot a $[2; 8]$ intervallumban amelyre teljesül, hogy az f függvény görbéje alatti terület a $[2; t]$ intervallumon megegyezik a g függvény görbéje alatti területtel a $[t; 8]$ intervallumon.
(Egy $[a; b]$ intervallumon folytonos függvény görbéje alatti terület ezen az intervallumon megegyezik az x tengely, az $x = a$, $x = b$ egyenletű egyenesek és a függvény grafikonja által meghatározott síkidom területével.)

9. Az $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = x^2 - 12x + 27$ függvény grafikonja a derékszögű koordináta-rendszerben parabola. (2017. május 9.)

a) Számítsa ki a parabola és az x tengely által bezárt (korlátos) síkidom területét!

b) Írja fel a parabolához az $E(5; -8)$ pontjában húzott érintő egyenletét!

c) Számítsa ki a parabola fókuszpontjának koordinátáit!

10. Adott a g függvény: $g(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$ $(x \in \boldsymbol{R})$ (2017. október 17.)

a) Adjon meg egy olyan (nem nulla hosszúságú) intervallumot, amilyen a g mindegyik helyettesítési értéke negatív!

b) Határozza meg a c lehetséges értékeit úgy, hogy $\int_0^c g(x)\,dx = 0$ teljesüljön!

c) Határozza meg az $f :]-4; -1[\to \boldsymbol{R}$, $f(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 12x + 20$ függvény minimumhelyét és a minimális függvényértéket!

11. (2018. október 16.)

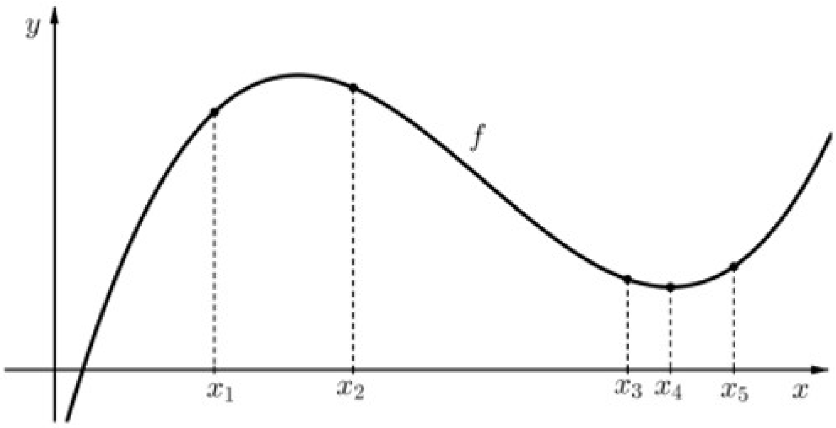
a) Határozza meg a $p > 0$ paraméter értékét úgy, hogy $\int_0^p (3x^2 - 24x + 20)dx = 0$ teljesüljön!

b) Határozza meg az a,b,c valós paraméterek értékét úgy, hogy az $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 28$ ($x \in \boldsymbol{R}$) függvénynek $x = 2$-ben zérushelye, $x = -4$-ben lokális maximumhelye, $x = -1$-ben pedig inflexiós pontja legyen!

12. (2019. október 15.)

a) Az ábrán a harmadfokú f függvény grafikonjának egy részlete látható. A függvény értelmezési tartományában megjelöltünk öt helyet.
Mindegyik esetben döntse el, hogy az adott helyen az f első, illetve második deriváltjának előjele pozitív (P) vagy negatív (N)! Válaszát írja a megadott táblázat megfelelő cellájába!
(Tudjuk, hogy $f'(x_4) = 0$.)

b) Adott az $y = -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 8$ egyenletű parabola.
Határozza meg a k valós paraméter értékét úgy, hogy a $4x - y = k$ egyenletű egyenes érintse a parabolát, és határozza meg az érintési pont koordinátáit is!



hely	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
f' előjele	P			0	
f'' előjele					

13. Adott négy, a valós számok halmazán értelmezett függvény:
$f(x) = (x+4)(2-x)$
$g(x) = x+4$
$h(x) = x^2 - 4$
$i(x) =\mid x \mid -4$
(2020. október 20.)

a) Határozza meg az f és g függvények grafikonja által közrezárt korlátos síkidom területét!

Egy négypontú gráf csúcsait megfeleltetjük e négy függvénynek. Két csúcsot pontosan akkor kötünk össze élleé, ha a két megfelelő függvények van közös zérushelye.

b) Rajzolja fel az így kapott gráfot!

A valós számok halmazán értelmezett k függvény zérushelyei -5 és 3, az m függvény zérushelyei 3 és -3, az n függvény zérushelyei pedig 5 és -5.
A p elsőfokú függvény hozzárendelési szabálya $p(x) = x + c$, ahol c egy valós szám.

c) Hányféleképpen választható meg a c konstans értéke úgy, hogy a k,m,n és p függvényekre a *b)* feladatban megadott szabály szerint elkészített négypontú gráf fagráf legyen?