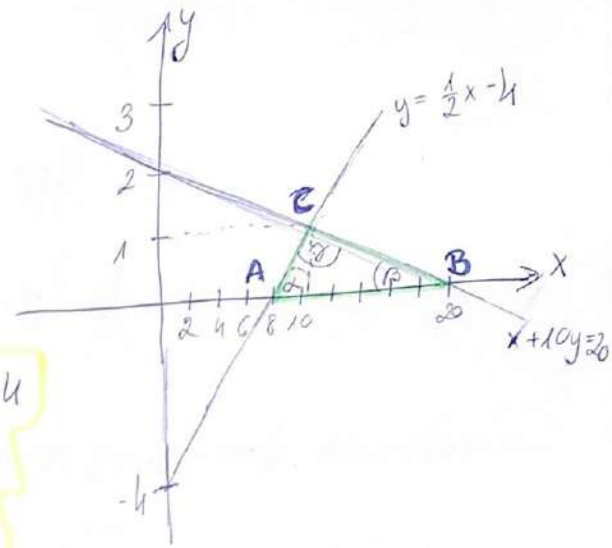
1.) $AB: y=0 \longrightarrow$ x tengely

$BC: x+10y=20$

$CA: y=\frac{1}{2}x-4$



a) csúcspontok koordinátái:

A: AB és CA metszete $\left.\begin{array}{l} y=0 \\ y=\frac{1}{2}x-4 \end{array}\right\}$ $0=\frac{1}{2}x-4$

$4=\frac{1}{2}x$

$8=x$

B: AB és BC metszete

$y=0;\ x+10y=20 \Rightarrow x+10\cdot 0=20$

$x=20$

C: BC és CA metszete

$\left.\begin{array}{l} x+10y=20 \\ y=\frac{1}{2}x-4 \end{array}\right\}$ $x+\frac{10}{2}x-40=20$

$\frac{12}{2}x=60$

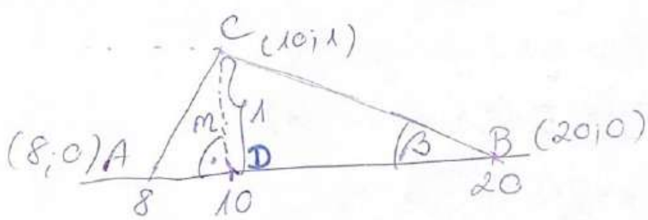
$x=10$

$A(8;0)$

$B(20;0)$

$C(10;1)$

b) B csúcsnál lévő belső szög:



DBC ⊾ Δ

$CD=1$

$DB=10$

$tg\,\beta=\frac{CD}{DB}=\frac{1}{10}=0{,}1$

$\beta\approx 5{,}71°$

2.) $A(8;2)$
$B(-1;5)$
C csúcs y tengelyen $\rightarrow C(0;y)$

Köré írt kör egyenlete: $x^2+y^2-6x-4y-12=0$

a) oldalfelező merőlegesek metszéspontjának koordinátái
||
Köré írt kör középpontja

Általános kör egyenlet: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$
$(x_0;y_0)$ kör középpontja

$$x^2+y^2-6x-4y-12=0$$
$$x^2-6x+y^2-4y-12=0$$
$$(x^2-3\cdot 2x+9)-9+(y^2-2\cdot 2y+4)-4-12=0$$
$$(x-3)^2+(y-2)^2-25=0$$
$$(x-3)^2+(y-2)^2=25$$
$\downarrow$
$\boxed{(3;2) \text{ a köré írt kör középpontja}}$

b) Δ súlypontjának koordinátái
súlypont koordináták $\rightarrow$ oldalak/3
C? $\quad C(0;y_1) \rightarrow$ de rajta van a körön
$$(0-3)^2+(y-2)^2=25$$
$$(y-2)^2=16 \quad \begin{cases} y_1=6 \\ y_2=-2 \end{cases}$$
$C_1=(0;6)$
$C_2=(0;-2)$
$$\boxed{S_1}=\left(\frac{8-1+0}{3};\frac{2+5+6}{3}\right)=\boxed{\left(\frac{7}{3};\frac{13}{3}\right)}$$
$$\boxed{S_2}=\left(\frac{8-1+0}{3};\frac{2+5-2}{3}\right)=\boxed{\left(\frac{7}{3};\frac{5}{3}\right)}$$

3.) $\cos 2x + 4\sin^2 x - 5\sin x - 4 = 0 \qquad x \in \mathbb{R}$

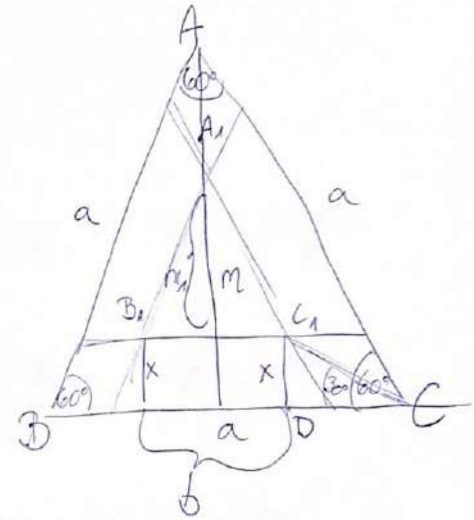
$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

$2\sin^2 x - 5\sin x - 3 = 0$ —> másodfokú $\sin x$-re

$\frac{+5 \pm \sqrt{25+24}}{4}$ $\frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} = \sin x$; $\frac{12}{4} = 3 = \sin x$ ↯ $\sin x \leq 1$

$\sin x = -\frac{1}{2}$

$\boxed{x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}}$



4.) ABC szab. Δ $\quad m = 1{,}5\,dm$

a) $A_1B_1C_1$ Δ területe?

szab Δ magassága az oldal $\frac{\sqrt{3}}{2}$-szerese

$m = 1{,}5 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a \Rightarrow a = \sqrt{3}\,dm$

$x < 0{,}5\,dm$

$A_1B_1C_1$ rajta vannak a belső szögfelezőkön

DCC_1 Δ ⦜

$DC = \frac{a-b}{2} = \frac{\sqrt{3}-b}{2}$ és $DC = x\sqrt{3}$, mert $ctg\,30° = \frac{DC}{x}$

$\frac{\sqrt{3}-b}{2} = x\sqrt{3}$

$b = -2x\sqrt{3} + \sqrt{3} = \sqrt{3}(1-2x)$

$T_{A_1B_1C_1} = \frac{b \cdot m_1}{2} = \frac{b \cdot b \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{b^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \boxed{\frac{3\sqrt{3}(1-2x)^2}{4}\,dm^2}$

b) másik témakör

↳ végén megnézhetjük

5.) Δ szögeire: $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{\cos(\alpha+\gamma)}{\cos(\beta+\gamma)}$

Állítás: A Δ egyenlő szárú vagy derékszögű

$\alpha+\gamma = 180° - \beta$

$\beta+\gamma = 180° - \alpha$

$\cos(180°-\beta) = -\cos\beta$

$\cos(180°-\alpha = -\cos\alpha$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} \Rightarrow \sin\alpha\cos\alpha = \cos\beta\cdot\sin\beta$$

$$\frac{\sin 2\alpha}{2} = \frac{\sin 2\beta}{2}$$

$$\sin 2\alpha = \sin 2\beta$$

$$0 \lneq 2\alpha \lneq 2\pi$$

$$0 \lneq 2\beta \lneq 2\pi$$

① $2\alpha = 2\beta$ vagy $\Leftarrow$

② $2\alpha = 180° - 2\beta \Rightarrow 2\alpha + 2\beta = 180°$

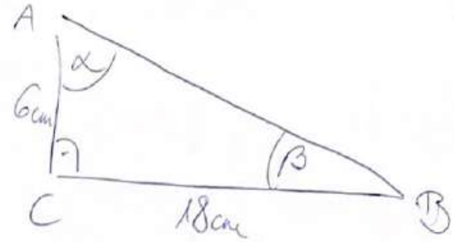
①. $\alpha = \beta \Rightarrow$ alapon fekvő szögek $=$ -k $\Rightarrow$ egyenlő szárú

②. $\alpha+\beta = 90°$ $\gamma = 180°-90° = 90°$ $\Rightarrow$ ⦜-ű Δ

6.) ABC derékszögű Δ

$BC = 18cm$

$CA = 6 cm$



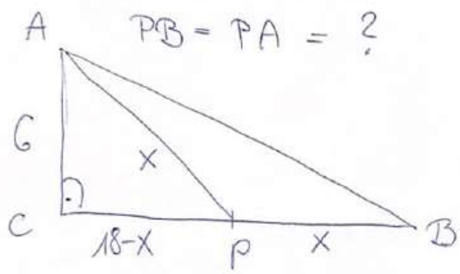
a) Δ szögei ?

$tg\,\beta = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$

$\beta \approx 18,43°$

$\alpha = 90° - \beta \approx 71,57°$

b) $PB = PA = ?$



$PCA: \quad 6^2 + (18-x)^2 = x^2$

$36 + 324 - 36x + x^2 = x^2$

$360 = 36x$

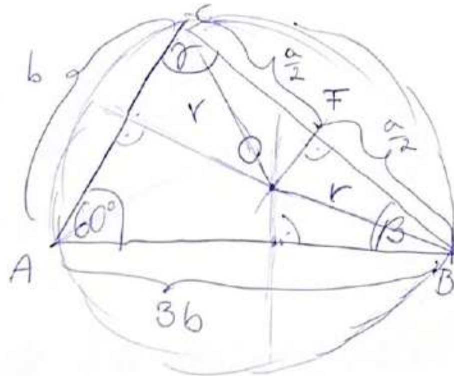
$x = 10 \rightarrow \boxed{PB = 10cm}$

c) más témakör

7.)

ABC körül írt kör sugara : $r = 26\ cm$, $BAC\sphericalangle = 60°$

a) BC oldal? = a



OBC△ egyenlőszárú

Középponti Kerületi∢

$BOC\sphericalangle = 2 \cdot BAC\sphericalangle = 120°$

$FOB\sphericalangle = 60°$

$\frac{FB}{26} = \sin 60° \Rightarrow FB = 26 \cdot \sin 60° \approx 22{,}5\ cm$

$\Downarrow$

$BC \approx 45\ cm \quad (52 \cdot \sin 60°)$

b) $AC = b\ cm$, $AB = 3b\ cm$ } másik 2 ∢ ?

Sin-tétellel $\left(\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}\right)$

$\frac{a}{\sin 60°} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{3b}{\sin\gamma}$

$\gamma = 120° - \beta$

$\frac{\sin(120° - \beta)}{\sin\beta} = 3$

$\sin 120° \cos\beta - \cos 120° \sin\beta = 3\sin\beta$

Kik: $\cos\beta \neq 0$

$\sin 120° - \frac{\cos 120° \cdot \sin\beta}{\cos\beta} = \frac{3\sin\beta}{\cos\beta}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot tg\beta = 3\,tg\beta$

$tg\beta \approx 0{,}3464$

$\beta \approx 19{,}1° \Rightarrow \gamma \approx 100{,}9°$

cos-tétellel $\left(c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)\right)$

BC oldalra

$(52 \sin 60°)^2 = b^2 + 9b^2 - 6b^2 \cos 60$

$\frac{(52 \sin 60°)^2}{(1 + 9 - 6\cos(60°))} = b^2$

$b^2 \approx 289{,}7 \quad b > 0$

$b \approx 17{,}0$

$3b \approx 51{,}0\ cm$

erre sin-tétel: $\frac{\sin\beta}{\sin 60°} = \frac{AC}{BC} \approx \frac{17}{45}$

$\sin\beta \approx 0{,}3273 \Rightarrow \beta \approx 19{,}1°$ → csak hegyes∢ lehet

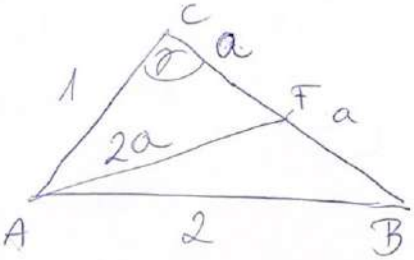
$\gamma \approx 100{,}9°$

8.)

$AB = 2$

$AC = 1$

BC = A csúcsból induló súlyvonal



a) $BC = ?$

AFC $\triangle$ AD re costétel:

$$4a^2 = a^2 + 1 - 2a\cos\gamma \quad \cdot 2 \rightarrow 8a^2 = 2a^2 + 2 - 4a\cos\gamma$$

ABC $\triangle$ AB re cos tétel:

$$4 = 4a^2 + 1 - 4a\cos\gamma$$

$\ominus$

$\Downarrow$

$$4 - 8a^2 = 2a^2 - 1$$

$$5 = 10a^2$$

$$\frac{1}{2} = a^2 \qquad a > 0$$

$$BC = 2a = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Longleftarrow a = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

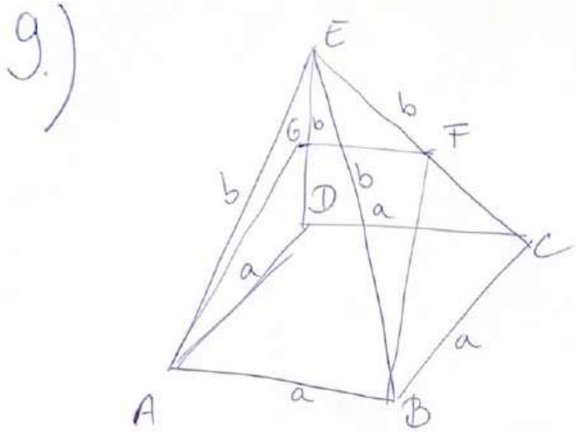
b) $T = \dfrac{AC \cdot BC \cdot \sin\gamma}{2} = \dfrac{\sqrt{2} \cdot \sin\gamma}{2}$

$$4a^2 = a^2 + 1 - 2a\cos\gamma \Rightarrow \cos\gamma = \frac{1-3a^2}{2a} = \frac{-1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$1 = \sin^2\gamma + \cos^2\gamma \Rightarrow \sin\gamma = \sqrt{1-\cos^2\gamma} = \sqrt{1-\frac{1}{8}} = \sqrt{\frac{7}{8}}$$

$$T = \frac{\sin\gamma}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

9.)



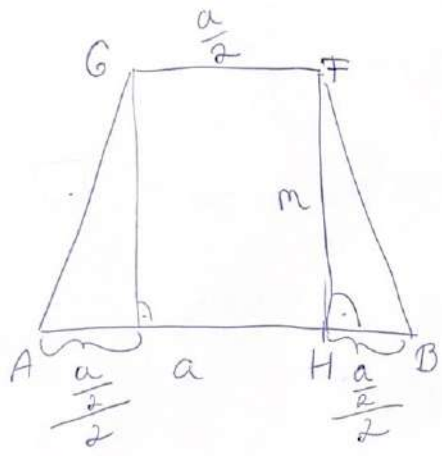
szabályos gúla

$a = 28$ alapél

F, G felezőpontok

$T_{ABFG} = 504$

$b = ?$ oldalél



GF az EDC Δ középvonala

$\parallel$

14

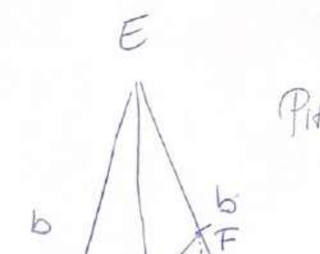
$ABFG$ szimmetrikus trapéz

$$T_{ABFG} = \frac{a + \frac{a}{2}}{2} \cdot m = \frac{28+14}{2} \cdot m = 504$$

$$21m = 504$$

$$m = 24$$

$HB = \frac{14}{2} = 7$



Pitag. tétel: $BF^2 = 24^2 + 7^2 \Rightarrow BF = 25$

$Q :=$ BC felezőpont

BCE egyenlő szárú $\Delta \Rightarrow EQC\ \sphericalangle = 90°$

$EQ \parallel FP \Rightarrow$ és F felező $\Rightarrow P$ is felez

$PC = \frac{1}{4} BC = 7$ és $PB = 21$

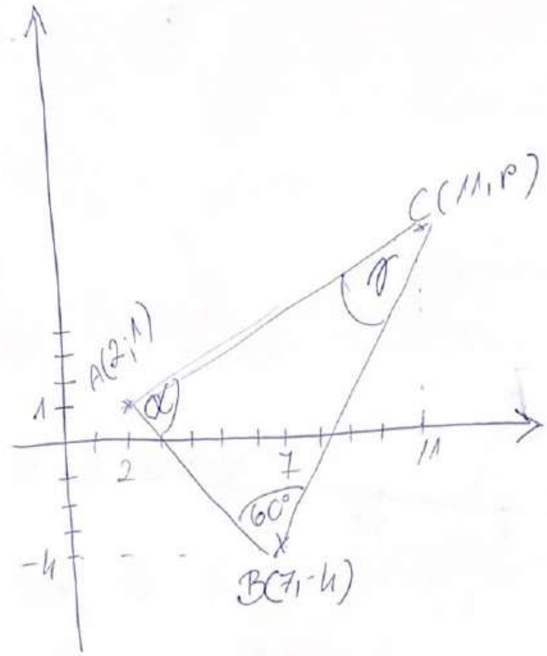
Pit. tétel (BPF): $PF^2 = 25^2 - 21^2 = 184$

Pit tétel (FPC): $FC^2 = 184 + 7^2 = 233$

$FC \approx 15{,}26$

$b \approx 30{,}53$

11.)



$p = ?$

AC-re cos tétel : $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB\cdot BC\cdot \overset{\cos 60^\circ}{0,5}$

$AB^2 = (7-2)^2 + (1-(-4))^2 = 50$

$BC^2 = 16 + (p+4)^2 = p^2 + 8p + 32$

$AC^2 = 81 + (p-1)^2 = p^2 - 2p + 82$

$p^2 - 2p + 82 = p^2 + 8p + 82 - \sqrt{50}\cdot\sqrt{p^2+8p+32}$

$\sqrt{50(p^2+8p+32)} = 10p$ $\qquad$ $p > 0$, mert $\sqrt{} \Rightarrow 10\cdot p$ is >0

$\Downarrow$

lehet 2-re emelni

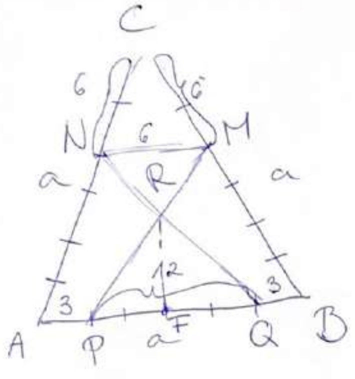
$p^2 + 8p + 32 = 2p^2$

$p^2 - 8p - 32 = 0$

$\boxed{p_1 = 4 + 4\sqrt{3}}$

$p_2 = 4 - 4\sqrt{3}$ ↯

12.)



szabályos Δ

$a = 18$

hatodolva az oldalak

PQR Δ területe?

CNM Δ: 6 oldalú szabályos

PQR Δ ~ MNR Δ (∡-eik váltószögek, csúcsszögek, =-k)

- hasonlóság aránya: 2 : 1

$PR = \frac{2}{3} PM$

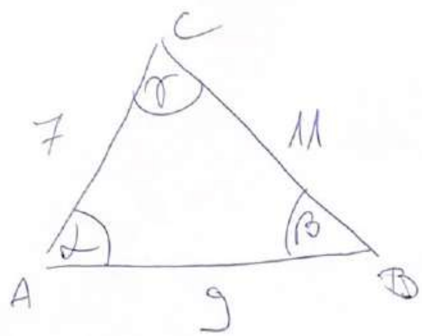
PM: BMP cos tétel: $PM = \sqrt{15^2 + 12^2 - 2 \cdot 15 \cdot 12 \cdot \cos 60°}$
$= \sqrt{189} = 3\sqrt{21}$

$PR = \frac{2}{3} PM = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$

PQR Δ FR magassága: Pit tétel:
$FR = \sqrt{84 - 36} = \sqrt{48}$

PQR Δ területe: $\frac{PQ \cdot FR}{2} = 6 \cdot FR = 24\sqrt{3}$

13.)



a) Áll: △ hegyesszögű

↓

ha a legnagyobb ∡ hegyesszög, ez teljesül

↓

leghosszabb oldallal szemben van

cos tétel: $\cos\alpha = \frac{7^2+9^2-11^2}{2\cdot 7\cdot 9} = \frac{1}{14}$

$\alpha \approx 85{,}9°$ ✓ hegyesszögű

b) oldalak aránya 3:4:5

D-ű △ számtani sorozat egymás utáni tagjai

oldalak: $a-b$, a, $a+b$ $\quad 0<d<a$

Pit. tétel: $(a-d)^2+a^2=(a+d)^2$

$a^2 = 4ad \quad a\neq 0$

$a = 4d$

↓

oldalak: $3d$, $4d$, $5d$ $\Rightarrow$ arány: 3:4:5

c) $T = 121{,}5\,cm^2$.

oldalak hossza?

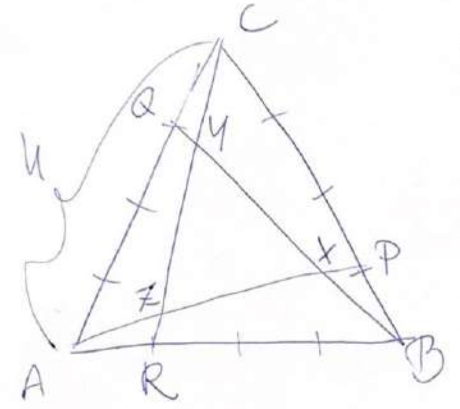
$T = \frac{3d\cdot 4d}{2} = 121{,}5 \Rightarrow \underbrace{12d^2 = 243 \quad d>0}_{d=4{,}5}$

⇓

oldalak: 13,5cm, 18cm, 22,5cm

14.) a) - nem ez a téma

b)



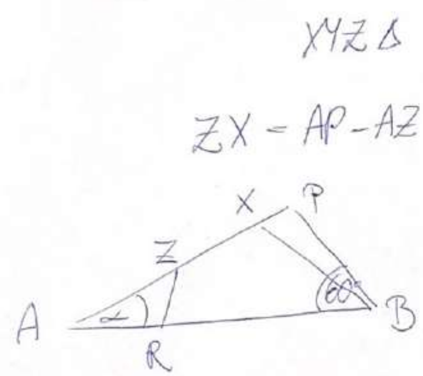
szab. Δ

$T_{XYZ\Delta} = ?$

ARZ, BPX, CQY egybevágók forgásszimmetria miatt

XYZ Δ szabályos

$ZX = AP - AZ - XP = AP - AZ - ZR \quad (XP = ZR)$



ABP Δ cos tétel: $AP^2 = 1^2 + 4^2 - 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot \cos 60° = 13$

$AP = \sqrt{13}$

$\cos \alpha = \frac{AP^2 + AB^2 - BP^2}{2AP \cdot AB} = \frac{13+16-1}{2 \cdot \sqrt{13} \cdot 4} \approx 0{,}9707$

$\alpha \approx 13{,}9°$

ARZ Δ: $AR = 1$ $AZR\sphericalangle = 60°$ $ARZ\sphericalangle = 120° - \alpha \approx 106{,}1°$

Sin tétel: $\frac{AZ}{1} = \frac{\sin(120° - \alpha)}{\sin 60°} \approx 1{,}1094$

$AZ \approx 1{,}109$

$\frac{ZR}{1} = \frac{\sin \alpha}{\sin 60°} \approx 0{,}2774$ $ZR \approx 0{,}277$

$ZX = AP - AZ - ZR \approx 2{,}220$

XYZ területe: $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot ZX^2 \approx 2{,}13$

szabályos Δ