BME TTK Érettségi Felkészítő 2022

VIII. Alkalom

Egybevágósági és hasonlósági transzformációk, sokszögek, térelemek

2022. április 13.

Kidolgozós feladatok

(2005. október 25.)

a) A $KLMN$ derékszögű trapéz alapjai $KL = 2\sqrt{12}$ és $MN = 3\sqrt{75}$ egység hosszúak, a derékszögű szár hossza $10\sqrt{2}$ egység. A trapézt megforgatjuk az alapokra merőleges LM szár egyenese körül.

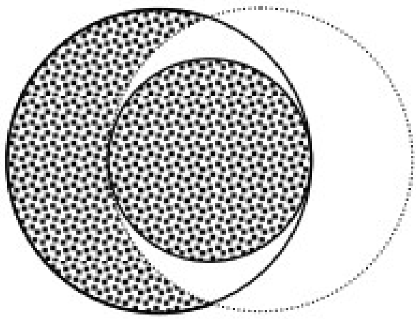
Számítsa ki a keletkezett forgástest térfogatát! (π két tizedesjegyre kerekített értékével számoljon, és az eredményt is így adja meg!)

b) Az $ABCD$ derékszögű érintőtrapéz AB és CD alapjai ($AB > CD$) hosszának összege 20. A beírt körnek az alapokra nem merőleges AD szárral vett érintési pontja negyedeli az AD szárat.

Számítsa ki a trapéz oldalainak hosszát!

2. Egy centiméterben mérve egész szám élhosszúságú kockát feldaraboltunk 99 kisebb kockára úgy, hogy közülük 98 darab egybevágó, 1 cm élű kocka. Számítsa ki az eredeti kocka térfogatát! (2005. október 25.)

3. Klári teasüteményt sütött. A meggyúrt tésztát olyan „téglatest" alakúra nyújtotta ki, amelynek a felülről látható lapja 30 cm × 60 cm méretű téglalap.
Majd egy henger alakú szaggatóval (határoló körének sugara 3 cm) „körlapokat" vágott ki a tésztából.
Ezután a körlapokból először „holdacskákat" vágott le úgy, hogy a szaggató határoló körének középpontját a már kivágott körlap középpontjától 2 cm távolságra helyezte el, és így vágott bele a körlapba. (Minden bevágásnál csakis egy körlapot vágott ketté.)
Miután minden körlapból levágott egy „holdacskát", a körlapokból visszamaradt részek mindegyikéből – egy másik szaggatóval – kivágott egy-egy lehető legnagyobb körlap alakú süteményt. (2008. május 6.)



a) Hány cm^2 területű egy „holdacska" felülről látható felülete? (Az eredményt egy tizedes jegyre kerekítve adja meg!)

Klári a „holdacskák" és a kis körlapok elkészítése után visszamaradt tésztát ismét összegyúrta, majd ugyanolyan vastagságúra nyújtotta ki, mint az első esetben, de most négyzet alakú lett a kinyújtott tészta.

b) Hány cm hosszú ennek a négyzetnek az oldala, ha Klári a 30 cm × 60 cm-es téglalapból eredetileg 50 darab 3 cm sugarú körlapot szaggatott ki? (Az eredményt egészre kerekítve adja meg!)

4. Jancsi vázát készít. Egy 10 cm sugarú, belül üreges gömbből levágott m magasságú ($m > 10$) gömbszelet határoló köréhez egy szintén m magasságú hengerpalástot ragaszt. A henger sugara megegyezik a gömbszeletet határoló kör sugarával.
Mekkorának válassza Jancsi a gömbszelet m magasságát, hogy a vázába a lehető legtöbb víz férjen? (A váza anyaga vékony, ezért a vastagságától eltekintünk, s hogy ne boruljon fel, egy megfelelő formájú üreges fatalpra fogják állítani.)

Tudjuk, hogy ha a gömbszelet magassága m, a határoló kör sugara pedig r, akkor a térfogata: $V = \frac{\pi}{6}m \cdot (3r^2 + m^2)$. (2009. október 20.)

5. Az $ABCD$ konvex négyszög oldalegyeneseinek egyenlete rendre:
$DA: 3x - 4y - 20 = 0$
$AB: 3x + 5y - 20 = 0$
$BC: 4x - 3y + 12 = 0$
$CD: 5x + 3y + 15 = 0$
(2010. május 4.)

a) Igazolja, hogy a négyszög átlói az x és az y tengelyre illeszkednek, továbbá hogy ennek a négyszögnek nincsen derékszöge!

b) Bizonyítsa be, hogy ez a négyszög húrnégyszög!

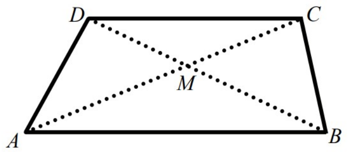
6. Egy 90 m^2 területű, trapéz alakú virágágyás párhuzamos oldalainak aránya $AB : DC = 3 : 2$. Az ágyást tavasszal és ősszel is az évszaknak megfelelő virágokkal ültetik be. Mindkét alkalommal mindegyik fajta virágból átlagosan 50 virágtövet ültetnek négyzetméterenként.

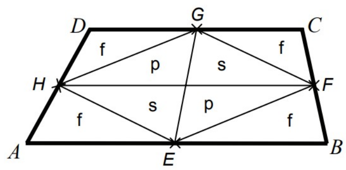
Tavasszal az átlókkal kijelölt négy háromszögre bontották a virágágyást. Az ABM háromszögbe sárga virágokat, a DMC háromszögbe fehéret, a maradék két részbe piros virágokat ültettek. (2010. május 4.)

***a*)** A tavaszi parkosításkor hány darab fehér, hány piros és hány sárga virágot ültettek be?

Ősszel a másik ábra alapján tervezték meg a virágok elhelyezését. (Az E, F, G és H pontok a trapéz oldalainak felezőpontjai.) Ekkor is fehér (f), piros (p) és sárga (s) virágokat ültettek a tervrajz alapján.

***b*)** Az őszi parkosításkor hány darab fehér, hány piros és hány sárga virágot ültettek?





Válaszait az alábbi táblázatban tüntesse fel!

	fehér	piros	sárga
tavasszal			
ősszel			

7. Egy forgáskúp nyílásszöge $90°$, magassága 6 cm. (2012.május 8.)

a) Számítsa ki a kúp térfogatát (cm^3-ben) és felszínét (cm^2-ben)!

b) A kúp alaplapjával párhuzamos síkkal kettévágjuk a kúpot. Mekkora a keletkező csonkakúp térfogata (cm^3-ben), ha a metsző sík átmegy a kúp beírt gömbjének középpontján?

Válaszait egészre kerekítve adja meg!

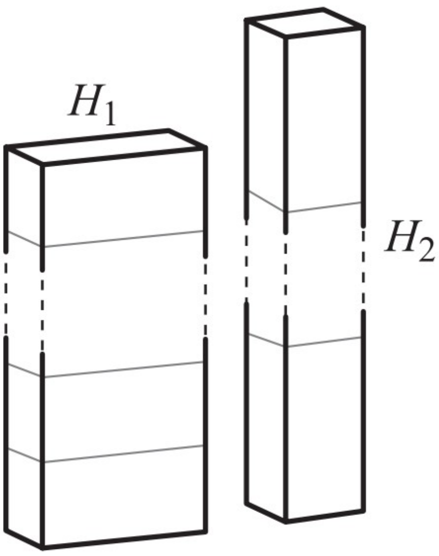
8. Két egyenes hasábot építünk: H_1-et és H_2-t. Az építéshez használt négyzetes oszlopok (négyzet alapú egyenes hasábok) egybevágók, magasságuk kétszer akkora, mint az alapélük. A H_1 hasáb építésekor a szomszédos négyzetes oszlopokat az oldallapjukkal illesztjük össze, a H_2 hasáb építésekor pedig a négyzet alakú alaplapjukkal – az ábra szerint. (2012.május 8.)

a) A H_1 és H_2 egyenes hasábok felszínének hányadosa: $\frac{A_{H_1}}{A_{H_1}} = 0{,}8$

Hány négyzetes oszlopot használtunk az egyes hasábok építéséhez, ha H_1-et és H_2-t ugyanannyi négyzetes oszlopból építettük fel?

b) Igazolja, hogy a $\left\{\frac{3n+2}{4n+1}\right\}$ $(n \in \mathbf{N}^+)$ sorozat szigorúan monoton csökkenő és korlátos!

Válaszait egészre kerekítve adja meg!



9. Egy 2 cm sugarú, 20 cm széles festőhengerrel dolgozva egy fordulattal körülbelül 3 ml festéket viszünk fel a falra. (A festőhenger csúszás nélkül gördül a falon.) (2014. október 14.)

a) Elegendő-e 4 liter falfestéket vásárolnunk, ha a szobánkban 40 m^2-nyi falfelületet egy rétegben, egyszer akarunk lefesteni?

b) Milyen magasan állna 4 liter falfesték a 16 cm átmérőjű, forgáshenger alakú festékes vödörben? Válaszát cm-ben, egészre kerekítve adja meg!

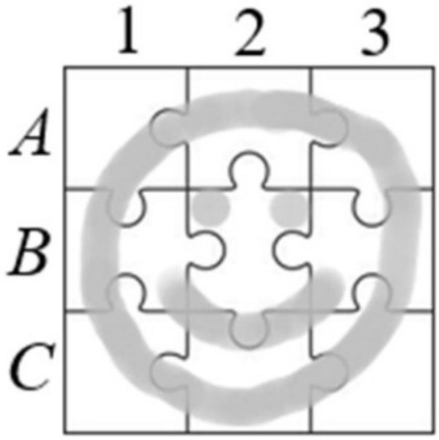
10. Az ábrán egy 3×3-as kirakós játék (puzzle) sematikus képe látható. A kirakós játékot egy gráffal szemléltethetjük úgy, hogy a gráf csúcsai ($A1$, $A2$, ... , $C3$) a puzzle-elemeket jelölik, a gráf két csúcsa között pedig pontosan akkor vezet él, ha a két csúcsnak megfelelő puzzle-elemek közvetlenül (egy oldalban) kapcsolódnak egymáshoz a teljesen kirakott képben. (2018. május 8.)

***a*)** Rajzolja fel a kirakós játék gráfját (a csúcsok azonosításával együtt), és határozza meg a gráfban a fokszámok összegét!

***b*)** Igazolja, hogy a megrajzolt gráfban nincs olyan (gráfelméleti) kör, amely páratlan sok élből áll!

***c*)** A teljesen kirakott képen jelöljön meg a puzzle-elemek közül 7 darabot úgy, hogy a kirakósjáték általuk alkotott részlete (a részletnek megfelelő gráf) már ne legyen összefüggő!

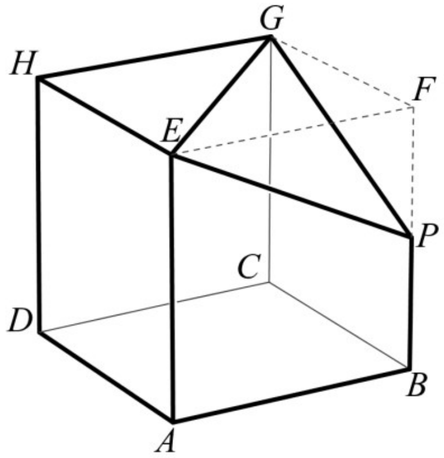
***d*)** Hányféleképpen lehet a puzzle-elemek közül hármat úgy kiválasztani, hogy ezek a teljesen kirakott képben kapcsolódjanak egymáshoz (azaz mindhárom képrészlet közvetlenül kapcsolódjék legalább egy másikhoz a kiválasztottak közül)? (Az elemek kiválasztásának sorrendjére nem vagyunk tekintettel.)



11. A 6 cm oldalélű tömör $ABCDEFGH$ kocka BF élén megjelöltük az él P felezőpontját, majd a kockát kettévágtuk az E, G, P pontokra illeszkedő síkkal (az ábra szerint). (2017. október 17.)

a) Mekkora a kettévágás során keletkezett nagyobbik test felszíne?

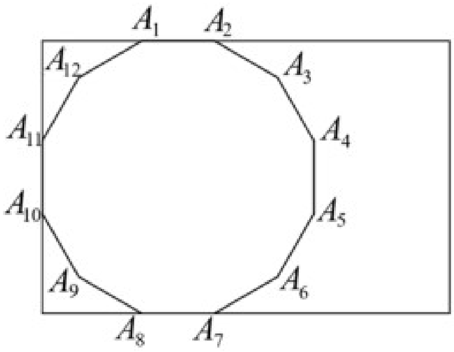
b) Mekkora szöget zár be a metsző sík és a kocka $EFGH$ lapjának síkja?



12. Egy nagy méretű, köztéren felállítandó óra számlapját szabályos 12-szög alakúra tervezik. Az $A_1A_2 \ldots A_{12}$ számlapot egy 260 cm × 180 cm-es téglalap alakú alumíniumlemezből vágják ki az ábra szerint. (2018. október 16.)

a) Mekkora tömegű az óralap, ha az alumíniumlemez vastagsága 2 mm, és 1 m^3 alumínium tömege 2700 kg?

b) Jelöljük meg a szabályos tizenkétszög A_1 csúcsát! Hány olyan derékszögű háromszög van, amelynek egyik csúcsa az A_1, a másik két csúcsa pedig szintén a tizenkétszög valamelyik két csúcsával azonos? (Két háromszöget akkor tekintünk különbözőnek, ha legalább az egyik csúcsuk különböző.)

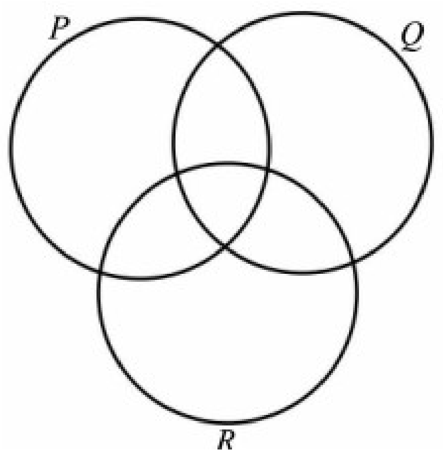


13. Tekintsük a következő, egyszerű gráfokra vonatkozó állítást:
Ha a gráf minden pontjának fokszáma legalább 2, akkor a gráf biztosan összefüggő **(2013. május 7.)**

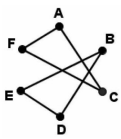
a) Döntse el, hogy igaz vagy hamis az állítás! Válaszát indokolja!

b) Fogalmazza meg az állítás megfordítását! Döntse el, hogy igaz vagy hamis az állítás megfordítása! Válaszát indokolja!

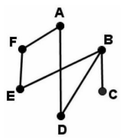
Tekintsük a következő halmazokat:
$P = \{$összefüggő gráfok$\}$, $Q = \{$egyszerű gráfok$\}$, $R = \{$kört tartalmazó gráfok$\}$



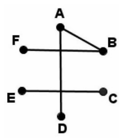
c) Helyezze el az alábbi gráfok ábrájának sorszámát a fenti halmazábrában a megfelelő helyre!



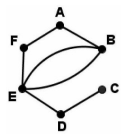
1. ábra



2. ábra

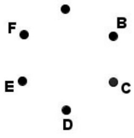


3. ábra



4. ábra

d) Rajzoljon egy 6 pontú fagráfot az 5. ábrára, és helyezze el ennek a sorszámát is a fenti halmazábrában a megfelelő helyre!



5. ábra