

# BME TTK Érettségi Felkészítő 2022

VIII. Alkalm

Egybevágósági és hasonlósági transzformációk, sokszögek, térelemek

2022. április 13.

## Kidolgozós feladatok

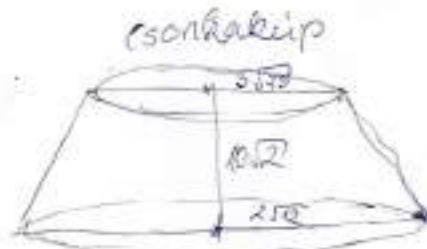
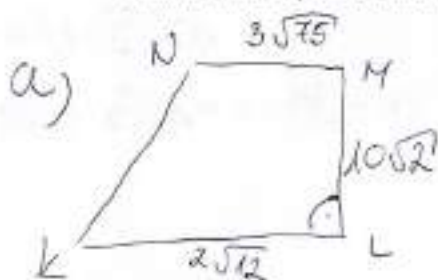
(2005. október 25.)

- a) A  $KLMN$  derékszögű trapéz alapjai  $KL = 2\sqrt{12}$  és  $MN = 3\sqrt{15}$  egység hosszúak, a derékszögű szár hossza  $10\sqrt{2}$  egység. A trapézt megforgatjuk az alapokra merőleges  $LM$  szár egyenese körül.

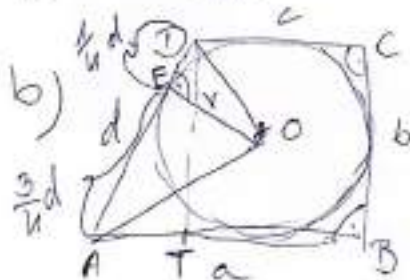
Számítsa ki a keletkezett forgástest térfogatát! ( $\pi$  két tizedesjegyre kerekített értékével számoljon, és az eredményt is így adja meg!)

- b) Az  $ABCD$  derékszögű érintőtrapéz  $AB$  és  $CD$  alapjai ( $AB > CD$ ) hosszának összege 20. A beírt körnek az alapokra nem merőleges  $AD$  szárral vett érintési pontja negyedeli az  $AD$  szárat.

Számítsa ki a trapéz oldalainak hosszát!



$$V = \frac{m}{3} \pi (R^2 + r^2 + Rr) \approx 13326,47$$



$$a + c = 20 \rightarrow = b + d$$

$$b = 2r$$

$$O \text{ szögfelezője metszéspontja } = AOD \Delta$$

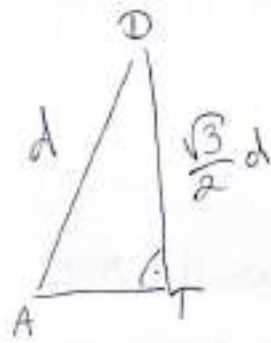
$$\angle DAB + \angle ADC = 180^\circ$$

$r \rightarrow ACE \Delta$  magassága

$$\text{magasságtétel} \rightarrow r^2 = \frac{3d^2}{16}$$

$$r = \frac{d\sqrt{3}}{4}$$

$$b = 2r = \frac{d\sqrt{3}}{2} = TD$$



$\Rightarrow$   $ATD \triangle$  szab.  $\triangle$  felté

$$\downarrow AT = \frac{d}{2} \Rightarrow a = c + \frac{d}{2}$$

$$d + b = 20 \Rightarrow d + \frac{d\sqrt{3}}{2} = 20$$

$$d = \frac{40}{2 + \sqrt{3}} = 4(2 - \sqrt{3}) \approx 10,72$$

$$b = \frac{d\sqrt{3}}{2} = 20(2\sqrt{3} - 3) \approx 9,28$$

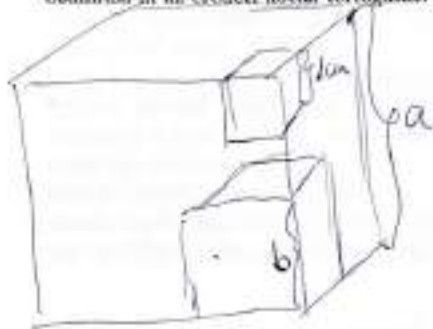
$$a + c = 2c + \frac{d}{2} = 20$$

$$2c + \frac{4(2 - \sqrt{3})}{2} = 20$$

$$c = 10(\sqrt{3} - 1) \approx 7,32$$

$$a = 20 - c = 10(3 - \sqrt{3}) \approx 12,68$$

2. Egy centiméterben mérve egész szám élhosszúságú kockát feldaraboltunk 99 kisebb kockára úgy, hogy közülük 98 darab egybevágó, 1 cm élű kocka. Számítsa ki az eredeti kocka térfogatát! (2005. október 25.)



$$a \in \mathbb{Z}$$

98 1cm élű  
1db bcm élű

$$a^3 - b^3 = 98$$

$$b > 1$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) = 98$$

$$a-b < a^2 + ab + b^2$$

$$\begin{array}{r} 98 \overline{) 277} \\ 54 \\ \hline 237 \\ 161 \\ \hline 76 \\ 70 \\ \hline 6 \end{array}$$

a egész  
↓  
b is egész  
↓  
 $a-b \in \mathbb{Z}$   
 $a^2 + ab + b^2 \in \mathbb{Z}$

$$98 = 2 \cdot 7 \cdot 7$$

$$\begin{array}{l} 1 \cdot 98 \quad (1.) \\ \quad \vee \\ 2 \cdot 49 \quad (2.) \\ \quad \vee \\ 7 \cdot 14 \quad (3.) \end{array}$$

$$(1.) \quad \left. \begin{array}{l} a-b=1 \\ a^2+ab+b^2=98 \end{array} \right\} \rightarrow a=b+1$$

$$(b+1)^2 + (b+1)b + b^2 = 98$$

$$3b^2 + 3b = 97 \rightarrow 3(b^2 + b) = 97 \quad \downarrow \quad 97/3 \notin \mathbb{Z}$$

$$(2.) \quad \left. \begin{array}{l} a-b=2 \\ a^2+ab+b^2=49 \end{array} \right\} a=b+2 \quad \left. \begin{array}{l} (b+2)^2 + (b+2)b + b^2 = 49 \\ b^2 + 2b = 15 \end{array} \right\}$$

$$b^2 + 2b - 15 = 0$$

$$b^2 + 2b - 15 = 0$$

$$(3.) \quad \left. \begin{array}{l} a-b=7 \\ a^2+ab+b^2=14 \end{array} \right\} a=b+7 \quad \left. \begin{array}{l} (b+7)^2 + (b+7)b + b^2 = 14 \\ 3b^2 + 21b = -35 \end{array} \right\}$$

$$3b^2 + 21b = -35 \quad \downarrow$$

$$V_{\text{kocka}} = 5 \text{ cm}^3 = 125 \text{ cm}^3$$

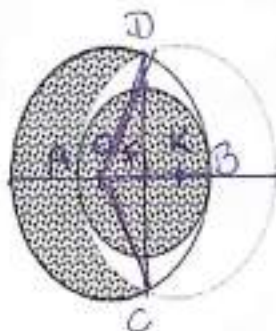
$$\begin{array}{l} b_1 = 3 \\ a_1 = 5 \\ \rightarrow b_2 = -5 \end{array}$$

3. Klári teasüteményt sütött. A meggyűrt tésztát olyan „téglatest” alakúra nyújtotta ki, amelynek a felülről látható lapja  $30\text{ cm} \times 60\text{ cm}$  méretű téglalap.

Majd egy henger alakú szaggatóval (határoló körének sugara  $3\text{ cm}$ ) „körlapokat” vágott ki a tésztából.

Ezután a körlapokból először „holdacsukát” vágott le úgy, hogy a szaggató határoló körének középpontját a már kivágott körlap középpontjától  $2\text{ cm}$  távolságra helyezte el, és így vágott bele a körlapba. (Minden bevágásnál csak egy körlapot vágott ketté.)

Miután minden körlapból levágott egy „holdacsukát”, a körlapokból visszamaradt részek mindegyikéből – egy másik szaggatóval – kivágott egy-egy lehető legnagyobb körlap alakú süteményt. (2008. május 6.)



- a) Hány  $\text{cm}^2$  területű egy „holdacska” felülről látható felülete? (Az eredményt egy tizedes jegyre kerekítve adja meg!)

Klári a „holdacsukák” és a kis körlapok elkészítése után visszamaradt tésztát ismét összegyúrta, majd ugyanolyan vastagságúra nyújtotta ki, mint az első esetben, de most négyzet alakú lett a kinyújtott tészta.

- b) Hány  $\text{cm}$  hosszú ennek a négyzetnek az oldala, ha Klári a  $30\text{ cm} \times 60\text{ cm}$ -es téglalappal eredetileg 50 darab  $3\text{ cm}$  sugarú körlapot szaggatott ki? (Az eredményt egészre kerekítve adja meg!)

a)

$O$  középpontú kört eltoljuk  $2\text{ cm}$ -el ( $\vec{OK}$  vektorral)

a körlapból kivágunk  $T$  tartományt  $\rightarrow$

$T$ -nek szimmetriatengelye  $DC$  és  $OK$

$T$ -t két kör ív 2 körív sugara  $3-3\text{ cm}$

középpontjuk  $O$  és  $K$

$T$  2 db egybevágó körselethez áll

$$T_{DCB} = t_{\text{körívek}} - t_{\text{háromszög}} \quad (\text{CBO}\Delta)$$

$O$ DBC körívek középponti szöge és  $ODC$   $\Delta$  szöve

$\beta$  - a  $DOC$  szög  $DOC \hat{=} = 2\alpha$

$$\cos \alpha = \frac{OF}{OC} = \frac{1}{3} \rightarrow F \text{ felv}$$

$$\alpha = 1,23 = 70,53^\circ$$

$$l_{\text{DBC}} = r \cdot 2\alpha^{(\text{rad})} = 7,39$$

$$t_{\text{körívek}} = \frac{l_{\text{DBC}} \cdot r}{2} = 11,07 \text{ cm}^2$$

$$t_{\text{háromszög (DDB)}} = \frac{r^2 \sin(2\alpha)}{2} = 2,83 \text{ cm}^2$$

$$t_{\text{kör szelet}} = 8,25 \text{ cm}^2$$

$$t_{\text{haddacska}} = T_{\text{kor}} - 2 \cdot t_{\text{kör szelet}} = 11,78 \text{ cm}^2$$

haddacska felülről  
látható felülete

- b) 4 körleptől letl egy haddacska és egy 2cm sugarú körlept formájú sitermény  
AB = 4cm

Kér: az eredeti 30x60 as téglalapból  
kivágott 50 db 2cm sugarú kört.

A kivágott sitermények alapterülete

$$50 \cdot 11,78 + 50 \cdot 2^2 \cdot \pi = 50 \cdot (11,78 + 12,56) =$$
$$= 1217 \text{ cm}^2$$

$$\text{Maradék: } 30 \cdot 60 - 1217 = 583 \text{ cm}^2$$

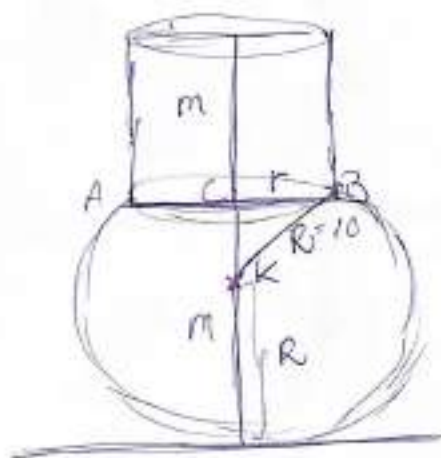
Ebből négyzet alapú formát kellett készíteni  
azonos vastagsággal, aminek alapterülete  
a maradék alapterület.

$$\text{négyzet oldala: } \sqrt{583} \text{ cm} \approx 24 \text{ cm}$$

4. Jancsi vázát készít. Egy 10 cm sugarú, belül üreges gömbből levágott  $m$  magasságú ( $m > 10$ ) gömbszelet határoló köréhez egy szintén  $m$  magasságú hengerpalástot ragaszt. A henger sugara megegyezik a gömbszelet határoló kör sugarával.

Mekkorának válassza Jancsi a gömbszelet  $m$  magasságát, hogy a vázába a lehető legtöbb víz férjen? (A váza anyaga vékony, ezért a vastagságától eltekintünk, s hogy ne boruljon fel, egy megfelelő formájú üreges fátalpra fogják állítani.)

Tudjuk, hogy ha a gömbszelet magassága  $m$ , a határoló kör sugara pedig  $r$ , akkor a térfogata:  $V = \frac{\pi}{6} m \cdot (3r^2 + m^2)$ . (2009. október 20.)



$$R=10$$

$$m > 10$$

KBC  $\Delta$  befogói:  $m-10, r$   
 átfogó: 10 cm

$$\text{Pit-t: } (m-10)^2 + r^2 = 100$$

$$r^2 = 20m - m^2$$

$$V_{\text{vaza}} = \frac{\pi}{6} m \cdot (3r^2 + m^2) + r^2 \pi m =$$

$$= \frac{\pi}{6} m (3 \cdot (20m - m^2) + m^2) + \pi (20m - m^2) m$$

$$= \pi \left( -\frac{4}{3} m^3 + 30m^2 \right) = \frac{2\pi}{3} (45m^2 - 2m^3)$$

$$V \text{ differenciálható } V' = \pi (-4m^2 + 60m) = 4\pi (15 - m)m$$

$$V' = 0, \text{ ha } m = 15$$

$$10 < m < 20$$

	$10 < m < 15$	$m = 15$	$15 < m$
$V'$	$\oplus$	0	$\ominus$
$V$	nö	max	csök

$m = 15$  a  $V$  függvény ~~helye~~

abszolút maximum helye,  
 így ekkor lesz a váza térfogata

a legnagyobb  $V_{\text{max}} = 2250\pi \approx 7069 \text{ cm}^3$

(nem teljesen ez a térkép)

5. Az ABCD konvex négyszög oldal egyeneseinek egyenlete rendre:

$$DA: 3x - 4y - 20 = 0$$

$$AB: 3x + 5y - 20 = 0$$

$$BC: 4x - 3y + 12 = 0$$

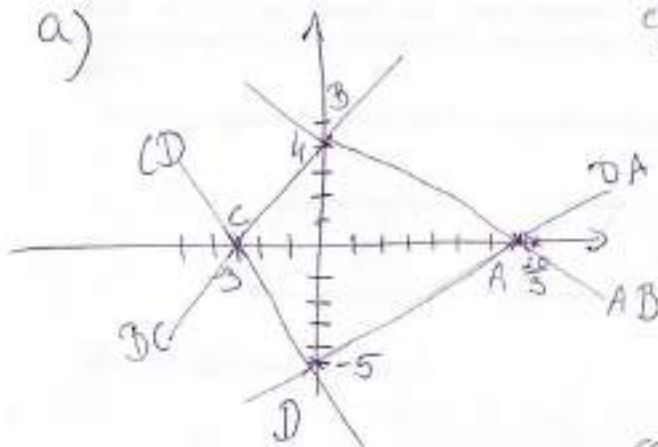
$$CD: 5x + 3y + 15 = 0$$

(2010. május 4.)

$\rightarrow$  X tengelyen lévő pont:  $(\frac{20}{3}; 0)$ ; y-t:  $(0; -5)$   
 $\rightarrow (\frac{20}{3}; 0)$ ;  $(0; 4)$   
 $\rightarrow (-3; 0)$ ;  $(0; 4)$   
 $\rightarrow (-3; 0)$ ;  $(0; 5)$

- a) Igazolja, hogy a négyszög átlói az x és az y tengelyre illeszkednek, továbbá hogy ennek a négyszögnek nincsen derékszöge!  
 b) Bizonyítsa be, hogy ez a négyszög hártnégyszög!

a)



egyenesek  $0, 1$  v.  $\infty$   
 páronként metszik  
 egymást

$$DA \cap AB = A = (\frac{20}{3}; 0)$$

$$AB \cap BC = B = (0; 4)$$

$$BC \cap CD = C = (-3; 0)$$

$$CD \cap DA = D = (0; -5)$$

(szükség az x és y  
 tengelyen  $\rightarrow$  AC átló és  
 BD átló az x- és  
 y-tengelyre illeszkedik)

normálvektor

$$DA \quad (3; -4)$$

$$AB \quad (3; 5)$$

$$BC \quad (4; -3)$$

$$CD \quad (5; 3)$$

} nincs merőleges

$\downarrow$   
 ABCD-nek nincs derékszöge

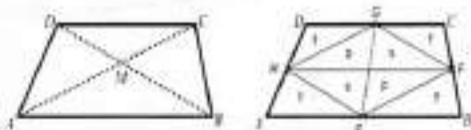
6. Egy  $90 \text{ m}^2$  területű, trapéz alakú virággyás párhuzamos oldalainak aránya  $AB : DC = 3 : 2$ . Az ágyást tavasszal és ősszel is az évszaknak megfelelő virágokkal ültetik be. Mindkét alkalommal mindegyik fajta virágból átlagosan 50 virágtövet ültetnek négyzetméterenként.

Tavasszal az átlókkal kijelölt négy háromszögre bontották a virággyást. Az ABM háromszögbe sárga virágokat, a DMC háromszögbe fehér, a maradék két részbe piros virágokat ültettek. (2010. május 4.)

a) A tavasi parkosításkor hány darab fehér, hány piros és hány sárga virágot ültettek be?

Összel a másik ábra alapján tervezték meg a virágok elhelyezését. (Az E, F, G és H pontok a trapéz oldalainak felezőpontjai.) Ekkor is fehér (f), piros (p) és sárga (s) virágokat ültettek a tervrajz alapján.

b) Az őszi parkosításkor hány darab fehér, hány piros és hány sárga virágot ültettek?



Válaszait az alábbi táblázatban tüntesse fel!

	fehér	piros	sárga
tavasszal	$14,4 \cdot 50 = 720$	$3 \cdot 720 = 2160$	1620
ősszel	2250	1125	1125

a) A teljes beültetéshez  $50 \cdot 90 = 4500$  db virágra van szükség, mivel színei virágok arány a területek arányából kiderül.

MBA és MCD hasonló, mivel szögek páronként egyenlők (csúcsszögek, váltószögek)

$$\frac{AB}{CD} = \frac{3}{2} = \frac{AM}{MC} = \frac{BM}{MD}$$

$$T_{MBA} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot T_{MCD}$$

ADC  $\Delta$  területét DM szakasz  $\frac{MA}{MC} = \frac{3}{2}$  arányban osztja  
MBC és HCD  $\Delta$  magassága azonos

$$T_{MBC} = \frac{3}{2} \cdot T_{MCD} \quad \text{hasonlóan } T_{MAD} = \frac{3}{2} T_{MCD}$$

$$T_{\text{trapéz}} = T_{MCD} + 2 \cdot T_{MBC} + T_{MBA} = 6,25 T_{MCD} \rightarrow T_{MCD} = 14,4 \text{ m}^2$$



8) EFGH paralel. területet jele  $T_{ABCD}$ -nek  $\Rightarrow 115 m^2$

$$\left( pl: T_{ABCD} = \frac{AB+X}{2} m = HF \cdot m = 2 \left( HF \cdot \frac{m}{2} \right) \right)$$

2 átlója ki egyenlő területű  $\Delta$ -re bontja.

$$\Rightarrow \text{piros és sárga } \frac{2250}{2} = 1125 \text{ db}$$

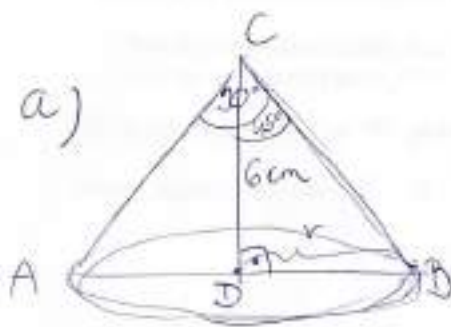
fehér  $\rightarrow 2250$



7. Egy forgáskúp nyílásszöge  $90^\circ$ , magassága 6 cm. (2012.május 8.)

- a) Számítsa ki a kúp térfogatát ( $\text{cm}^3$ -ben) és felszínét ( $\text{cm}^2$ -ben)!
- b) A kúp alaplajával párhuzamos síkkal kettévágjuk a kúpot. Mekkora a keletkező csonkakúp térfogata ( $\text{cm}^3$ -ben), ha a metsző sík átmegy a kúp beírt gömbjének középpontján?

Válaszait egésze kerekítve adja meg!



$$\angle DCB = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$

$$\angle DBC = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$$

$$CD = DB = 6 \text{ cm} = r$$

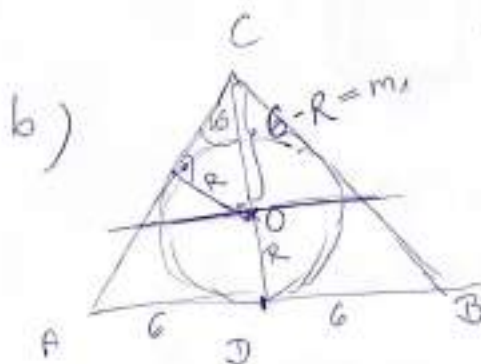
$\triangle DBC \triangle D$ ,  
 $CB$  négyzetoldala  $\rightarrow CB = 6\sqrt{2}$

$$V = \frac{\pi \cdot r^3}{3} = \frac{6^2 \cdot \pi \cdot 6}{3} = 72\pi \approx$$

$$\approx 226 \text{ cm}^3$$

$$A = r \cdot \pi (r + a) = 6\pi (6 + 6\sqrt{2}) =$$

$$= 36(1 + \sqrt{2})\pi \approx 273 \text{ cm}^2$$



$$R \cdot 2 = 6 - R$$

$$R = 6(\sqrt{2} - 1) \approx 2,49 \text{ cm}$$

$$m_1 = 6 - R \approx 3,51 \text{ cm}$$

$$\frac{V_1}{V} = \left(\frac{m_1}{m}\right)^3 = \left(\frac{12 - 6\sqrt{2}}{6}\right)^3$$

$$V_1 = 72(2 - \sqrt{2})^3 \pi \approx 45,5 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{csonkakúp}} \approx 181 \text{ cm}^3$$

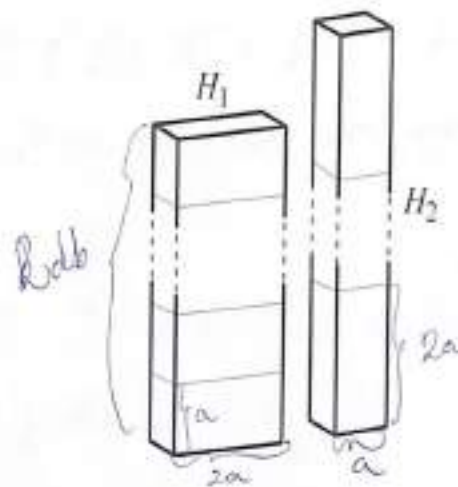
8. Két egyenes hasábot építünk:  $H_1$ -et és  $H_2$ -t. Az építéshez használt négyzetes oszlopok (négyzet alapú egyenes hasábok) egybevágók, magasságuk kétszer akkora, mint az alapélük. A  $H_1$  hasáb építésekor a szomszédos négyzetes oszlopokat az oldallapjukkal illesztjük össze, a  $H_2$  hasáb építésekor pedig a négyzet alakú alaplapjukkal – az ábra szerint. (2012.május 8.)

a) A  $H_1$  és  $H_2$  egyenes hasábok felszínének hányadosa:  $\frac{A_{H_1}}{A_{H_2}} = 0,8$

Hány négyzetes oszlopot használtunk az egyes hasábok építéséhez, ha  $H_1$ -et és  $H_2$ -t ugyanannyi négyzetes oszlopból építettük fel?

b) Igazolja, hogy a  $\left\{ \frac{3n+2}{4n+1} \right\}$  ( $n \in \mathbb{N}^+$ ) sorozat szigorúan monoton csökkenő és korlátos!

Válaszait egészre kerekítve adja meg!



$$a) \quad A_{H_1} = 2 \cdot 2a^2 + 2 \cdot k \cdot a^2 + 2 \cdot k \cdot 2a^2 = 2a^2(3k+2)$$

$$A_{H_2} = 2a^2 + k \cdot k \cdot 2a^2 = 2a^2(kk+1)$$

$$\frac{A_{H_1}}{A_{H_2}} = 0,8 \Rightarrow \frac{3k+2}{kk+1} = 0,8 \Rightarrow 3k+2 = 0,8(kk+1)$$

$$6 \text{ db hasábot használtunk} \quad k = 6$$

b) nem lehetetlen

9. Egy 2 cm sugarú, 20 cm széles festőhengerrel dolgozva egy fordulattal körülbelül 3 ml festéket viszünk fel a falra. (A festőhenger csúszás nélkül gördül a falon.) (2014. október 14.)

- a) Elegendő-e 4 liter falfestéket vásárolnunk, ha a szobánkban  $40 \text{ m}^2$ -nyi falfelületet egy rétegben, egyszer akarunk lefesteni?  
 b) Milyen magasan állna 4 liter falfesték a 16 cm átmérőjű, forgáshenger alakú festékes vödörben?  
 Válaszát cm-ben, egésze kerekítve adja meg!



a) egy fordulattal lefestett falfelület nagysága a (festő) henger palástjának területével egyenlő

$$P = 2 \cdot 2 \cdot 20 \cdot \pi = 80\pi \approx 251,3 \text{ cm}^2$$

$$40 \text{ m}^2 = 400000 \text{ cm}^2 \rightarrow \text{Teljes falfelülethez.}$$

$$\frac{400000}{251,3} \approx 1592 \text{ fordulat}$$

$$1592 \cdot 3 = 4776 \text{ ml} \approx 4,8 \text{ l}$$

4 l festék nem elég

b)  $4 \text{ l} = 4 \text{ dm}^3 = 4000 \text{ cm}^3$

$d = 16 \text{ cm} \rightarrow r = 8 \text{ cm}$

$$4000 \text{ cm}^3 = 8^2 \cdot \pi \cdot m$$

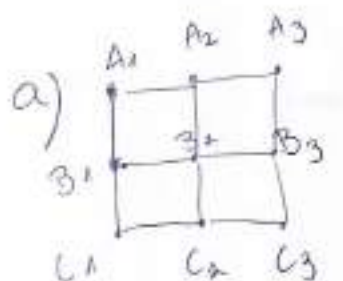


$$m = \frac{4000}{64\pi} \approx 19,9 \text{ cm} \approx 20 \text{ cm}$$

ilyen magasan áll a festék a vödörben

10. Az ábrán egy  $3 \times 3$ -as kirakós játék (puzzle) tematikus képe látható. A kirakós játékot egy gráffal szemléltethetjük úgy, hogy a gráf csúcsai ( $A_1, A_2, \dots, C_3$ ) a puzzle-elemeket jelölik, a gráf két csúcsa között pedig pontosan akkor vezet él, ha a két csúcsnak megfelelő puzzle-elemek közvetlenül (egy oldalban) kapcsolódnak egymáshoz a teljesen kirakott képen. (2018. május 8.)

- Rajzolja fel a kirakós játék gráfját (a csúcsok azonosításával együtt), és határozza meg a gráfban a fokszámok összegét!
- Igazolja, hogy a megrajzolt gráfban nincs olyan (gráfelméleti) kör, amely páratlan sok élből áll!
- A teljesen kirakott képen jelöljön meg a puzzle-elemek közül 7 darabot úgy, hogy a kirakósjáték általuk alkotott részlete (a részletnek megfelelő gráf) már ne legyen összefüggő!
- Hányféleképpen lehet a puzzle-elemek közül háromot úgy kiválasztani, hogy ezek a teljesen kirakott képen kapcsolódjanak egymáshoz (azaz mindhárom képrészlet közvetlenül kapcsolódjék legalább egy másikhoz a kiválasztottak közül)? (Az elemek kiválasztásának sorrendjere nem vagyunk tekintettel.)



fokszámok összege:

$$2 + 3 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 3 + 2 = 24$$

c) PE:  $A_2, B_1$  -et kiválasztottuk

d) L vagy — alakban csatlakoznak

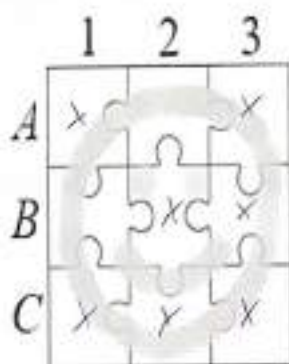
— alakban: 3 vízszintes 3 függőleges

L alakban:  $\lrcorner \llcorner \ulcorner \llcorner$

V esetben a középső elem  
4 féle helyen lehet  $\Rightarrow 16$  eset

Összesen: 22

10



b) színezzük a gráf csúcsait pirosra és kékre



Piros csúcsból csak kékbe kétféle csak pirosba tudunk lépni

Ha a gráf egy körét az éleken bejárva visszajutunk a kiindulási pontba, akkor a lépések száma piros

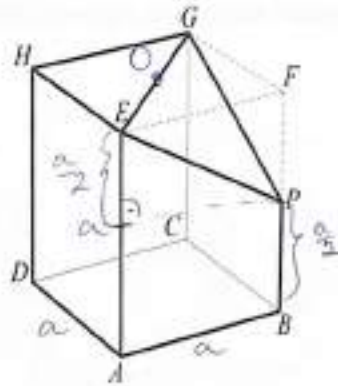
$V_1$

A gráf egy köré 1, 2, 3 v. 4 "négyzetből" álló sokszöget "kerthet körül"

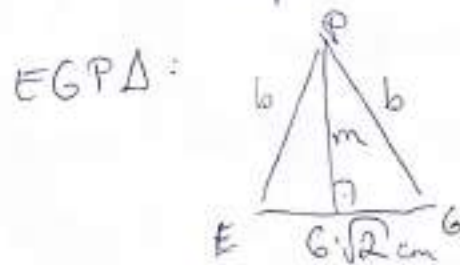
Ha a körbekerített négyzetek száma 1, 2, 3 v. 4, akkor a kör élének száma rendre 4, 6, 8, 8

11. A 6 cm oldalélű tömör  $ABCDEFGH$  kocka  $BF$  élén megjelöltük az  $\ell$   $P$  felezőpontját, majd a kockát kettévágtuk az  $E, G, P$  pontokra illeszkedő síkkal (az ábra szerint). (2017. október 17.)

- a) Mekkora a kettévágás során keletkezett nagyobbik test felszíne?  
 b) Mekkora szöget zár be a metsző sík és a kocka  $EFGH$  lapjának síkja?



a) Van 3 db 6 cm oldalú négyzet  $\rightarrow 36 \text{ cm}^2 \cdot 6$   
 2 egybevágó derékszögű trapez  
 2 egyenlő szárú  $\Delta \rightarrow T_{EGH\Delta} = 0,5 \cdot 36 \text{ cm}^2$   
 alapok: 6 cm, 3 cm  $m = a = 6 \text{ cm}$   
 $T_{\text{trapez}} = 27 \text{ cm}^2$



Pit. tétel:

$$\begin{cases} b^2 = 6^2 + 3^2 = 45 \\ b = 3\sqrt{5} \text{ cm} \\ m^2 = (3\sqrt{5})^2 + (3\sqrt{2})^2 \\ m^2 = 27 \\ m = 3\sqrt{3} \text{ cm} \end{cases}$$

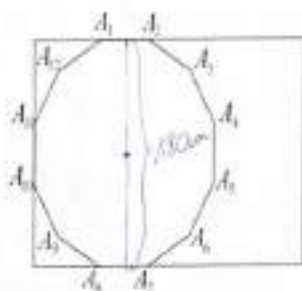
$$T_{EGP} = \frac{6\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{3}}{2} \approx 22 \text{ cm}^2$$

„ Nagyobbik =  $202 \text{ cm}^2$

b)  $\angle FOP = ?$   
 $FP = 3 \text{ cm}$   
 $FO = 3\sqrt{2} \text{ cm}$   
 $\tan(\angle FOP) = \frac{3}{3\sqrt{2}} \approx 0,7071$   
 $\angle FOP \approx 35,3^\circ$

12. Egy nagy méretű, köztéren felállítandó óra számlapját szabályos 12-szög alakúra tervezik. Az  $A_1, A_2, \dots, A_{12}$  számlapot egy  $260 \text{ cm} \times 180 \text{ cm}$ -es téglalap alakú alumíniumlemezből vágják ki az ábra szerint. (2018. október 16.)

- a) Mekkora tömegű az óralap, ha az alumíniumlemez vastagsága  $2 \text{ mm}$ , és  $1 \text{ m}^3$  alumínium tömege  $2700 \text{ kg}$ ?
- b) Jelöljük meg a szabályos tizenkétcsücsű  $A_1$  csücsöt! Hány olyan derékszögű háromszög van, amelynek egyik csücsze az  $A_1$ , a másik két csücsze pedig szintén a tizenkétcsücsű valamelyik két csücszével azonos? (Két háromszöget akkor tekintünk különbözőnek, ha legalább az egyik csücsük különböző.)

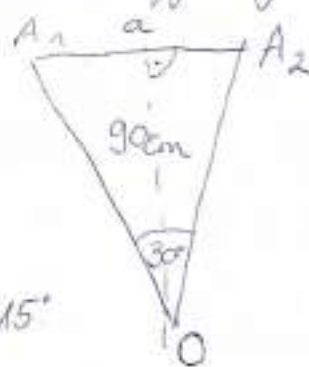


a) A szab. 12-szög felbontható 12 db egybevágó  $30^\circ$ -os szöszögű  $\Delta$ -re

A 12-szög kp.-je  $O_1$  az  $A_1 O A_2$  egyenlő szöszű  $\Delta$  magassága:

$$m = 90 \text{ cm}$$

$$\text{alappja: } a = A_1 A_2 = 2 \cdot 90 \cdot \text{tg} 15^\circ \approx 48,2 \text{ cm}$$



$$T_{12\text{-szög}} = 12 \cdot \frac{am}{2} \approx 26000 \text{ cm}^2$$

$$V_{\text{óralap}} = 26000 \cdot 0,2 = 5200 \text{ cm}^3 = 0,0052 \text{ m}^3$$

$$\text{Tömeg: } 0,0052 \cdot 2700 \approx 14 \text{ kg}$$

b) Thalész-t megfordítása  $\rightarrow$   $k$ -ű  $\Delta$  lesz, ha a  $\Delta$  leghosszabb oldala a 12-szög köré írt körének átmérője  $\rightarrow$  12-szög két átkellenes csücsze (pl.  $A_1 A_7$ )

ha  $A_1 A_7 \rightarrow 10$  lehetőség (10 csücsz)

Ha  $A_1$  a  $k$ -ű csücs  $\rightarrow A_2 A_8, A_3 A_9, A_4 A_{10}, A_5 A_{11} \vee A_6 A_{12}$  az  $\Delta$  egy  $15^\circ$

13. Tekintsük a következő, egyszerű gráfokra vonatkozó állítást:  
 Ha a gráf minden pontjának fokszáma legalább 2, akkor a gráf biztosan összefüggő (2013. május 7.)

a) Döntse el, hogy igaz vagy hamis az állítás! Válaszát indokolja!  $H_1$  pl:

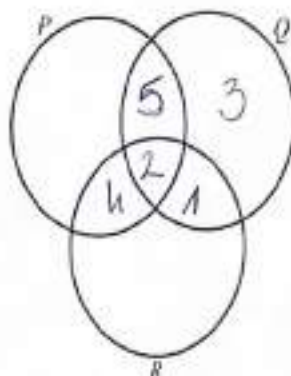


b) Fogalmazza meg az állítás megfordítását! Döntse el, hogy igaz vagy hamis az állítás megfordítása! Válaszát indokolja!

Ha a gráf összefüggő, akkor  $\forall$  pontjának fokszáma legfeljebb 2.  $H_1$  pl

Tekintsük a következő halmazokat:

$P = \{\text{összefüggő gráfok}\}$ ,  $Q = \{\text{egyszerű gráfok}\}$ ,  $R = \{\text{kért tartalmazó gráfok}\}$



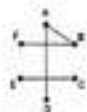
c) Helyezze el az alábbi gráfok ábrájának sorszámát a fenti halmazábrában a megfelelő helyre!



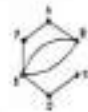
1. ábra



2. ábra



3. ábra



4. ábra

d) Rajzoljon egy 6 pontú fazrálót az 5. ábrára, és helyezze el ennek a sorszámát is a fenti halmazábrában a megfelelő helyre!



5. ábra