

# Matematika érettségi felkészítő

2021. április 21.

1) a) Döntse el, hogy az alábbi négy állítás közül melyik igaz és melyik hamis! Válaszát írja a táblázatba!

A: Egy 6 pontot tartalmazó teljes gráfnak 15 éle van.

B: Ha egy teljes gráfnak páros számú éle van, akkor a pontok száma is páros.

C: Ha egy 51 pontú gráfban nincs kör, akkor legfeljebb 50 éle lehet.

D: Nincs olyan 6 pontú gráf, amelyben a foksámok összege 11.

A	B	C	D

b) Ha valaki sohasem hallott a gráfokról, és mégis kitölti a fenti táblázatot, akkor mekkora valószínűséggel lesz helyes mind a négy válasza?

c) Tagadja az alábbi mondatot:

”Nincs olyan szerelem, aki el nem múlik.” (Népdalgyűjtés)

(2005. május emelt szint)

2) Tekintsük a következő, egyszerű gráfokra vonatkozó állítást:

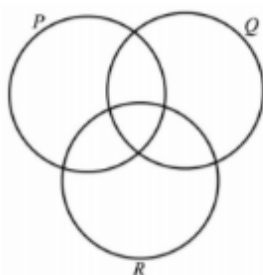
*Ha a gráf minden pontjának foksáma legalább 2, akkor a gráf biztosan összefüggő.*

a) Döntse el, hogy igaz vagy hamis az állítás! Válaszát indokolja!

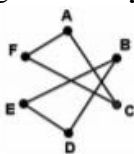
b) Fogalmazza meg az állítás megfordítását! Döntse el, hogy igaz vagy hamis az állítás megfordítása! Válaszát indokolja!

Tekintsük a következő halmazokat:

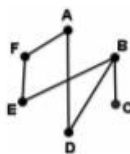
$P = \{\text{összefüggő gráfok}\}$ ,  $Q = \{\text{egyszerű gráfok}\}$ ,  $R = \{\text{kört tartalmazó gráfok}\}$ .



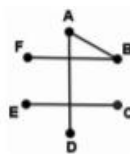
c) Helyezze el az alábbi gráfok ábrájának sorszámát a fenti halmazábrában a megfelelő helyre!



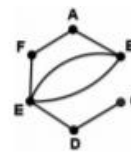
1. ábra



2. ábra



3. ábra



4. ábra

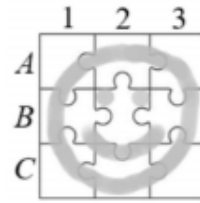
d) Rajzoljon egy 6 pontú fagráfot az 5. ábrára, és helyezze el ennek a sorszámát is a fenti halmazábrában a megfelelő helyre!



5. ábra

(2013. május emelt szint)

- 3) Az ábrán egy  $3 \times 3$ -as kirakós játék (puzzle) sematikus képe látható. A kirakós játékot egy gráffal szemléltethetjük úgy, hogy a gráf csúcsai ( $A_1, A_2, \dots, A_9$ ) a puzzle-elemeket jelölik, a gráf két csúcsa között pedig pontosan akkor vezet él, ha a két csúcsnak megfelelő puzzle-elemek közvetlenül (egy oldalban) kapcsolódnak egymáshoz a teljesen kirakott képben.



- a) Rajzolja fel a kirakós játék gráfját (a csúcsok azonosításával együtt), és határozza meg a gráfban a fokszámok összegét!
- b) Igazolja, hogy a megrajzolt gráfban nincs olyan (gráfelméleti) kör, amely páratlan sok élből áll!
- c) A teljesen kirakott képen jelöljön meg a puzzle-elemek közül 7 darabot úgy, hogy a kirakósjáték általuk alkotott részlete (a részletnek megfelelő gráf) már ne legyen összefüggő!
- d) Hányféleképpen lehet a puzzle-elemek közül hármat úgy kiválasztani, hogy ezek a teljesen kirakott képben kapcsolódjanak egymáshoz (azaz mindhárom képrészlet közvetlenül kapcsolódjék legalább egy másikhoz a kiválasztottak közül)? (Az elemek kiválasztásának sorrendjére nem vagyunk tekintettel.)

(2018. május emelt szint)

- 4) Döntse el, hogy igaz-e a következő kijelentés! Válaszát indokolja!

Van olyan  $G_1$ , illetve  $G_2$  fagráf, amelyre igaz, hogy a  $G_2$  csúcsainak száma kétszerese a  $G_1$  csúcsai számának, és a  $G_2$  éleinek száma is kétszerese a  $G_1$  élei számának. (A fagráfnak van legalább egy csúcsa.)

(2018. május emelt szint)

- 5) Öt különböző számjegyet leírunk egy papírlapra. Két számjegyet pontosan akkor kötünk össze egy vonallal (élel), ha különbségük páros szám (de egyik számjegyet se kötjük össze önmagával). Így egy ötpontú gráfot kapunk.

a) Határozza meg az alábbi két állítás logikai értékét (igaz vagy hamis)! Válaszát indokolja!

I. Lehetséges, hogy fagráfot kapunk.

II. Lehetséges, hogy nem összefüggő gráfot kapunk.

(2019. május emelt szint)

- 6) Egy lapra 10 pontot rajzoltunk, majd ezeket megszámoztuk 1-től 10-ig. Ezután minden egyes pontot egy-egy vonallal „összekötünk” a lapon szereplő összes olyan ponttal, amelyhez írt szám a kiválasztott ponthoz írt számnak osztója. (Például azt a pontot, amelyhez a 6-ot írtuk, összekötöttük mind a négy ponttal, amelyhez a 6 valamelyik osztóját írtuk.)

a) Igazolja, hogy az így kapott 10 csúcsú gráf nem egyszerű gráf!

b) Igazolja, hogy a gráf éleinek száma páratlan!

(2017. október emelt szint)

- 7) Legyen  $G$  egy nyolcpontú egyszerű gráf, amelynek összesen 9 éle van. Igazolja, hogy  $G$  csúcsai között biztosan van olyan, amelynek a fokszáma legalább 3.

(2016. május emelt szint)

- 8)  $H$  halmaz egy nyolcpontú egyszerű gráfok halmaza. A következő állítás a  $H$  elemeire vonatkozik: Ha egy (nyolcpontú egyszerű) gráf minden pontjának fokszáma legalább 3, akkor a gráf összefüggő.

a) Döntse el, hogy az állítás igaz vagy hamis! Válaszát indokolja!

b) Fogalmazza meg az állítás megfordítását a  $H$  elemeire vonatkozóan, és döntse el a megfordított állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszát indokolja!

(2015. október emelt szint)

- 9) a) Határozza meg az alábbi kijelentések logikai értékét (igaz-hamis)! Válaszait indokolja!

I. Van olyan hatpontú fagráf, amelynek minden csúcsa páratlan fokszámú

II. Ha egy hétpontú egyszerű gráfnak 15 éle van, akkor a gráf összefüggő.

III. Van olyan fagráf amelyben a csúcsok számának és az élek számának összege páros. Egy hatfős társaság tagjai A, B, C, D, E és F. Mindenkit megkérdeztünk, hogy hány ismerőse van a többiek között (az ismeretség kölcsönös). A válaszként kapott hat természetes szám szorzata 180. Az is kiderült, hogy A -nak legalább annyi ismerőse van, mint B -nek, B -nek legalább annyi ismerőse van, mint C -nek, és így tovább, E -nek legalább annyi ismerőse van, mint F -nek.

b) Szemléltesse egy-egy gráffal a lehetséges ismeretségi rendszereket!

(2014. október emelt szint)