

BME TTK Érettségi Felkészítő 2022

II. Alkalm

Racionális és irracionális számok, oszthatóság, számrendszerek

2022. március 2.

Kidolgozós feladatok

1. Az alábbi három kifejezés mindegyike esetén adja meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a kifejezés értelmezhető!
(2012. október 16.)

a) $\cos(\log_2 \sqrt{x})$

b) $\sqrt{\log_2(\cos x)}$

c) $\log_{\sqrt{x}}(\cos^2 x)$

2. (2013. május 7.)

- a) Egy bank olyan hitelkonstrukciót ajánl, amelyben napi kamatlábat számolnak úgy, hogy az adott hitelre megállapított éves kamatlábat 365-tel elosztják. Egy adott évben a hitelfelvételt követően minden napra kiszámolják a napi kamat értékét, majd ezeket december 31-én összeadják és csak ekkor tőkésítik (azaz a felvett hitel értékéhez adják). Ez a bank egy adott évben évi 8%-os kamatlábat állapított meg. Éva abban az évben a március 1-jén felvett 40 000 Ft után október 1-jén újabb 40 000 Ft hitelt vett fel. A két kölcsön felvétele után mennyi kamatot tőkésít a bank december 31-én? (A hitelfelvétel napján és az év utolsó napján is számítanak napi kamatot.)
- b) Ádám is vett fel hiteleket ettől a banktól évi 8%-os kamatos kamatra. Az egyik év január 1-jén éppen 1 000 000 Ft tartozása volt. Több hitelt nem vett fel, és attól kezdve 10 éven keresztül minden év végén befizette az azonos összegű törlesztőrészletet. (A törlesztőrészlet összegét a bank már az éves kamattal megnövelt tartozásból vonja le.) Mekkora volt ez a törlesztőrészlet, ha Ádám a 10 befizetés után teljesen visszafizette a felvett hitelt? Válaszát ezer forintra kerekítve adja meg!

3. A Robotvezérelt Elektromos Kisautók Nemzetközi Versenyén a versenyzők akkumulátorral hajtott modellekkel indulnak. A magyar versenyautó az első órában 45 kilométert tesz meg. Az akkumulátor teljesítményének csökkenése miatt az autó a második órában kevesebb utat tesz meg, mint az első órában, a harmadik órában kevesebbet, mint a másodikban, és így tovább: az indulás utáni n -edik órában megtett útja mindig 95,5%-a az $(n - 1)$ -edik órában megtett útjának ($n \in \mathbb{N}$ és $n > 1$). (2012. október 16.)

- a)* Hány kilométert tesz meg a 10. órában a magyarok versenyautója? Válaszát egész kilométerre kerekítve adja meg!

A versenyen több kategóriában lehet indulni. Az egyik kategória versenyszabályai lehetővé teszik az akkumulátorcserét verseny közben is. A magyar csapat mérnökei kiszámították, hogy abban az órában még nem érdemes akkumulátort cserélni, amelyekben az autó legalább 20 km-t megtesz.

- b)* Az indulástól számítva legkorábban hányadik órában érdemes akkumulátort cserélni?

A „Végkimerülés” kategóriában a résztvevők azon versenyeznek, hogy akkumulátorcsere és feltöltés nélkül mekkora utat tudnak megtenni az autók. A világrekordot egy japán csapat járműve tartja 1100 km-rel.

- d)* Képes-e megdönteni a magyar versenyautó a világrekordot a „Végkimerülés” kategóriában?

4. Mutassa meg, hogy a $2 \cdot 8^x + 7 \cdot 4^x + 3 \cdot 2^x = 0$ egyenletnek nincs valós gyöke!
(2014. május 6.)

5. $25^{\lg(x)} = 5 + 4 \cdot 5^{\lg(x)}$ (2014. október 14.)

6. Egy kereskedőcég bevételei két forrásból származnak: bolti árusításból és internetes eladásból. Ebben az évben az internetes árbevétel 70%-a volt a bolti árbevételnek. A cég vezetői arra számítanak, hogy a következő években az internetes eladásokból származó árbevétel évente az előző évi internetes árbevétel 4%-ával nő, a bolti eladásokból származó árbevétel viszont évente az előző évi bolti árbevétel 2%-ával csökken. Számítsa ki, hány év múlva lesz a két forrásból származó árbevétel egyenlő! (2014. október 14.)

7. Egy pénzüintézet a tőle felvett H forint összegű hitel visszafizetésekor havi $p\%$ -os kamattal számol ($p > 0$), ezért az adós havi törlesztőrészletét a $t_n = H \cdot \frac{q^n(q-1)}{q^n-1}$ képlettel számítja ki (minden hónapban ekkora összeget kell visszafizetni). A képletben $q = 1 + \frac{p}{100}$, az n pedig azt jelenti, hogy összesen hány hónapig fizetjük a törlesztőrészleteket (ez a hitel futamideje). (2015. május 5.)

- a) Fogyasztási cikkek vásárlására 1,6 millió forint hitelt vettünk fel a pénzüintézettől; a havi kamat 2%. Összesen hány forintot fizetünk vissza, ha 72 hónap alatt törlesztjük a felvett hitelt? Válaszát ezer forintra kerekítve adja meg!
- b) Legkevesebb hány hónapos futamidőre vehetünk fel egy 2 millió forintos hitelt, ha legfeljebb 60 ezer forintot tudunk havonta törleszteni, és a havi kamat 2%-os?
- c) Számítsa ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n$ határértéket, ha $q = 1,02$ és $H = 2000000$.

8. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert, ahol x és y pozitív valós számok!
(2017. május 9.)

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 0,2 \\ \frac{\lg(x) + \lg(y)}{2} = \lg\left(\frac{x+y}{2}\right) \end{array} \right\}$$

9. Egy baktériumtenyészet szaporodását laboratóriumi körülmények között vizsgálják. Az első órában 4 mikrocellát fertőznek meg baktériumokkal. A második órában a baktériumok szaporodni kezdenek, így további 3 cella fertőződik meg. A megfigyelés szerint ezután „szabályszerűvé” válik a baktériumok szaporodása: minden órában annyi új fertőzött cella keletkezik, ahány korábban összesen volt. (A harmadik órában $4 + 3 = 7$ új fertőzött mikrocella keletkezik, a negyedik órában 14, és így tovább.) (2017. május 9.) Ha a baktériumok szaporodásához továbbra is biztosítanak a megfelelő körülményeket, akkor az összes fertőzött mikrocella száma hányadik órában haladná meg a tízmilliót?

10. (2018. október 16.)

a) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$25 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x - 50 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{x+1} + 30 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{x+2} = 81$$

b) Igazolja, hogy $\frac{\lg(5^x) + \lg(5^{-x})}{2} \leq \lg\left(\frac{5^x + 5^{-x}}{2}\right)$ ($x \in \mathbf{R}$)

11. Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán! (2019. május 7.)

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} + \left(\frac{1}{9}\right)^{x+1} = 324$$

12. Hány olyan egész szám van, amelyik gyöke az alábbi egyenlőtlenségnek?
(2019. október 15.)

$$\log_{0,5}(2x + 100) \geq -8$$

13. (2019. október 15.)

- a) Igazolja, hogy nincs olyan 2-nél nagyobb n egész szám, melyre $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$ és $\binom{n}{3}$ (ebben a sorrendben) egy mértani sorozat egymást követő tagjai!
- b) Határozza meg azokat az 5-nél nagyobb n egész számokat, melyekre $\binom{n}{4}$, $\binom{n}{5}$ és $\binom{n}{6}$ (ebben a sorrendben) egy számtani sorozat egymást követő tagjai!