

BME TTK Érettségi Felkészítő 2022

V. Alkalom
Nevezetes összefüggések háromszögekben

2022. március 23.

Kidolgozós feladatok

1. Az ABC háromszög oldalegyeneseinek egyenlete: (2005. május 10.)

$$AB : y = 0,$$

$$BC : x + 10y = 20,$$

$$CA : y = \frac{1}{2}x - 4$$

- a) Számítsa ki a háromszög csúcspontjainak koordinátáit!
- b) Számítsa ki a háromszög B csúcsánál lévő belső szöget!

2. Egy háromszög két csúcsa $A(8; 2)$, $B(-1; 5)$, a C csúcs pedig illeszkedik az y tengelyre. A háromszög köré írt kör egyenlete: (2005. október 25.)

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$$

- a) Adja meg a háromszög oldalfelező merőlegesei metszéspontjának koordinátáit!
- b) Adja meg a háromszög súlypontjának koordinátáit!

3. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet! (2006. február 21.)

$$\cos 2x + 4 \sin^2 x - 5 \sin x - 4 = 0$$

4. Kartonpapírból kivágtunk egy 1,5 dm magasságú ABC szabályos háromszöglapot. A háromszöglapon párhuzamost húztunk a háromszög mindegyik oldalával, mindegyiktől ugyanakkora, 0,5 deciméternél kisebb x távolságra. Ezek az egyenesek az $A_1B_1C_1$ szabályos háromszög oldalegyenesei. (2006. február 21.)

- a) Írja fel az $A_1B_1C_1$ háromszög területét x függvényében!
- b) Szeretnénk egy $A_1B_1C_1$ alapú, x magasságú, felül nyitott egyenes hasáb alakú íróasztali tolltartót létrehozni a lapból, ezért levágtuk a fölösleget, majd az $A_1B_1C_1$ háromszög élei mentén felhajtottuk a hasáb oldallapjait.
Mekkora x esetén lesz a keletkezett hasáb térfogata maximális?

5. Igazolja, hogy ha egy háromszög szögeire érvényes az alábbi összefüggés, akkor a háromszög egyenlő szárú vagy derékszögű! (2006. október 3.)

$$\sin \alpha : \sin \beta = \cos (\alpha + \gamma) : \cos (\beta + \gamma)$$

6. Az ABC derékszögű háromszög BC befogójának hossza 18 cm, a CA befogójának hossza 6 cm. (2007. május 8.)

a) Mekkora a háromszög hegyesszögei?

A BC befogó egy P belső pontját összekötjük az A csúccsal. Tudjuk még, hogy $PB = PA$.

b) Milyen hosszú a PB szakasz?

Állítsunk merőleges egyenest az ABC háromszög síkjára a C pontban! A merőleges egyenes D pontjára teljesül, hogy CD hossza 15 cm.

c) Mekkora az $ABCD$ tetraéder térfogata?

7. Az ABC háromszög körülírt körének sugara 26 cm, $BAC\angle = 60^\circ$. (2007. október 25.)

a) Számítsa ki a BC oldal hosszát!

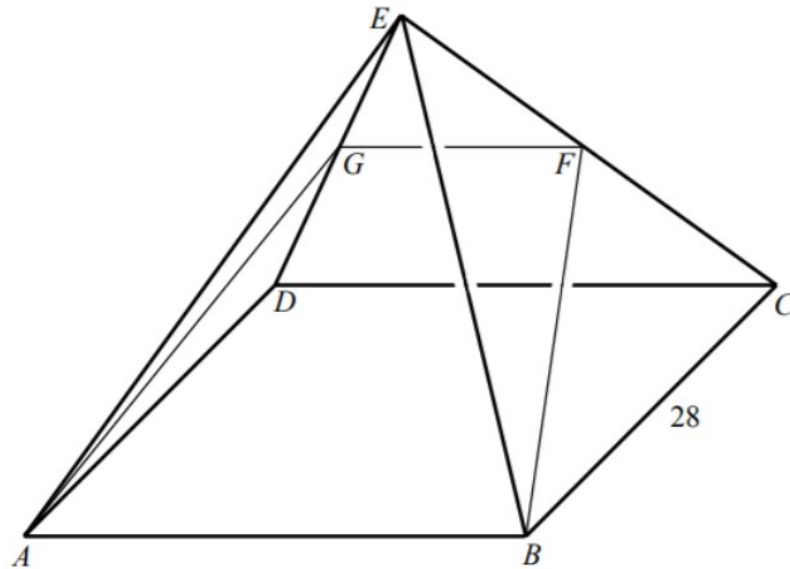
b) Hány fokos a háromszög másik két szöge, ha az AC oldal b cm, az AB oldal pedig $3b$ cm hosszúságú? A keresett értékeket egy tizedes jegyre kerekítve adja meg!

8. Az ABC háromszögben $AB = 2$, $AC = 1$, a BC oldal hossza pedig megegyezik az A csúcsból induló súlyvonal hosszával. (2008. október 21.)

a) Mekkora a BC oldal hossza? A hossz pontos értékét adja meg!

b) Mekkora a háromszög területe? A terület pontos értékét adja meg!

9. Az $ABCDE$ szabályos négyoldalú gúla alaplapja az $ABCD$ négyzet. A gúla alapéle 28 egység hosszú. Legyen F a CE oldalélnek, G pedig a DE oldalélnek a felezőpontja. Az $ABFG$ négyszög területe 504 területegység. Milyen hosszú a gúla oldaléle? (2008. október 21.)



**10. Vizsgáljuk azt a sorozatot, amelynek n -edik tagja adott $\alpha \in \mathbf{R}$ esetén:
 $a_n = n + \sin(n\alpha)$. (2017. október 17.)**

a) Legyen $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Írja fel a sorozat első három tagjának pontos értékét!

b) Milyen $\alpha \in [0; 2\pi]$ esetén lesznek az a_1, a_2, a_3 számok – ebben a sorrendben – egy konstans sorozattól különböző számtani sorozat szomszédos tagjai?

A megoldásában használhatja az alábbi azonosságokat is:

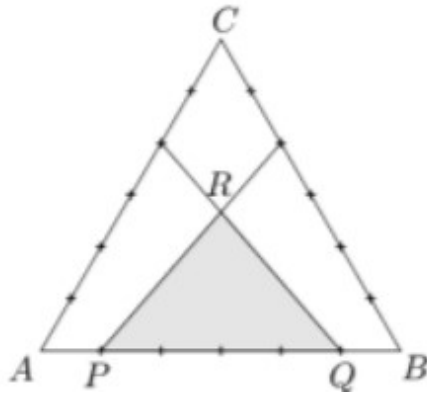
$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

11. A derékszögű koordináta-rendszerben az ABC háromszög csúcsai: $A(2; 1)$, $B(7; 4)$, $C(11; p)$. Határozza meg a p paraméter pontos értékét, ha a háromszög B csúcsánál levő belső szöge 60° -os. (2012. október 16.)

12. Az egyenlő oldalú ABC háromszög 18 egység hosszúságú oldalait hat-hat egyenlő részre osztottuk, és az ábra szerinti osztópontok összekötésével megrajzoltuk a PQR háromszöget. (2014. október 14.)

b) Számítsa ki a PQR háromszög területének pontos értékét!



13. Egy háromszög oldalainak hossza 7 cm, 9 cm és 11 cm. (2018. május 8.)

a) Igazolja, hogy a háromszög hegyesszögű!

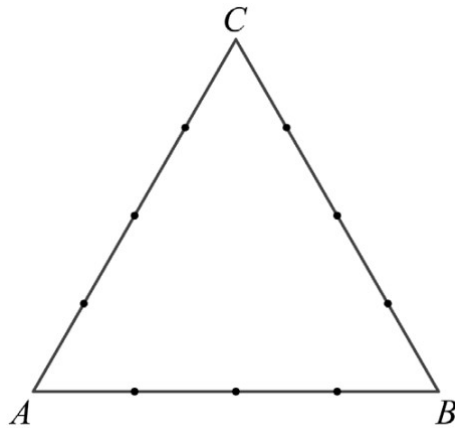
Egy derékszögű háromszög oldalainak centiméterben mért hossza egy számtani sorozat három egymást követő tagja.

b) Igazolja, hogy a háromszög oldalainak aránya 3:4:5.

c) Ennek a derékszögű háromszögnek a területe $121,5 \text{ cm}^2$. Számítsa ki a háromszög oldalainak hosszát!

14. Az ABC szabályos háromszög mindhárom oldalát 3-3 osztóponttal négy egyenlő részre osztottuk. (2020. október 20.)

- a) Hány olyan négyszög van, melynek mind a négy csúcsa a háromszög oldalain kijelölt 9 pont közül való úgy, hogy a négyszögnek a háromszög mindegyik oldalán van legalább egy csúcsa? (Két négyszöget különbözőnek tekintünk, ha legalább egy csúcsukban különböznek.)



Jelölje a 4 egység oldalú ABC szabályos háromszög BC oldalának B -hez közelebbi negyedelőpontját P , a CA oldal C -hez közelebbi negyedelőpontját Q , az AB oldal A -hoz közelebbi negyedelőpontját pedig R . Jelölje továbbá AP és BQ szakaszok metszéspontját X , BQ és CR szakaszok metszéspontját Y , végül CR és AP szakaszok metszéspontját Z .

- b) Határozza meg az XYZ háromszög területét!

