BME TTK Érettségi Felkészítő 2022

Másodfokú egyenletek, a kör, koordinátageometria

2022. március 30.

$$\underbrace{(x - x_1)\cdot(x - x_2)}=0$$

$$D = b^2 - 4\cdot a\cdot c$$

$D < 0$ nincs megoldás

$D = 0$ 1 megoldás

$D > 0$ 2 megoldás

$$a\cdot x^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2\cdot a}$$

Viét-formula:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases}$$

1. Tekintsük a valós számokon értelmezett $f(x) = \underbrace{(p-3{,}5)}_{a}x^2 + \underbrace{2(p-2)}_{b}x + \underbrace{6}_{c}$ függvényt, ahol p tetszőleges valós paraméter.

a) Mutassa meg, hogy tetszőleges p érték mellett az $x = -2$ zérushelye a függvénynek!

$$f(-2) = (p-3{,}5)(-2)^2 + 2(p-2)\cdot(-2) + 6 =$$

$$= \cancel{4p} - 14 + (\cancel{-4p}) + 8 + 6 = 0$$

b) Milyen p értékek esetén lesz a függvény másik zérushelye 1-nél nagyobb? $f(x) = (p-3{,}5)x^2 + \underbrace{2(p-2)}_{b}x + 6$

$\boxed{D>0}$ /1

$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

$D = [2(p-2)]^2 - 4 \cdot (p-3{,}5) \cdot 6 > 0$

$D = (4p-4)^2 - 24(p-3{,}5) > 0$

$= 16p^2 - 32p + 16 - 24p + 84$

$\sqrt{4(4p^2-14p+25)} \rightarrow 16p^2 - 56p + 100 > 0$

$x_{1,2} = \dfrac{-2(p-2) \pm \sqrt{4(p-2)^2 - 24(p-3{,}5)}}{2(p-3{,}5)} = \dfrac{-2p+4 \pm \sqrt{D}}{2(p-3{,}5)}$ /1

/4

$x_{1,2} = \dfrac{-2p+4 \pm 2\sqrt{4p^2-14p+25}}{2(p-3{,}5)} \rightarrow$ $x_1 = -2$

$x_2 = \dfrac{-3}{p-3{,}5} > 1$ / 1

$\dfrac{-3}{p-3{,}5} - 1 > 0$ $\qquad \dfrac{-p+0{,}5}{p-3{,}5} > 0$ /2

$- - - - - 0 + + + + + + 0 - - - - -$

0,5 3,5 /4

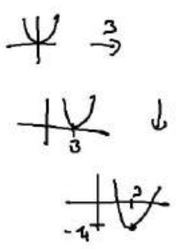
$M:]0{,}5 ; 3{,}5[$ / 2

2. Ábrázolja a derékszögű koordinátarendszerben az $f: [0;7] \to R, f(x) = |x^2 - 6x + 5|$ függvényt!

$(x-3)^2 - 4$

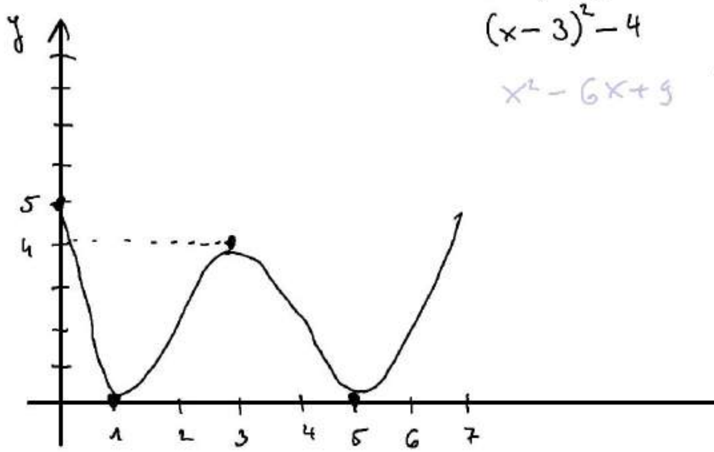
$x^2 - 6x + 9$

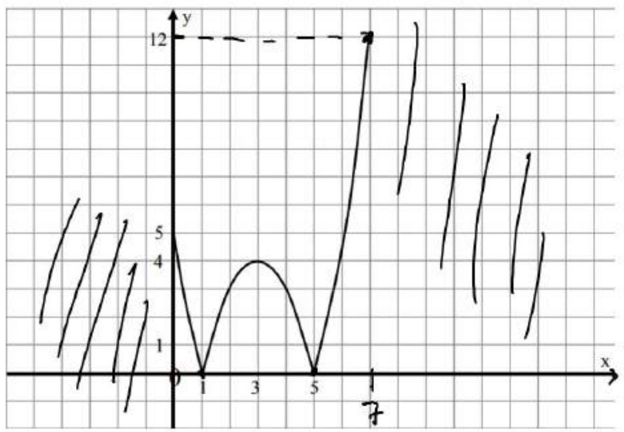
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

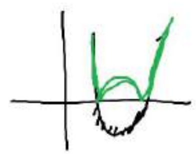


Adja meg az *f* függvény értékkészletét!

$x \,\begin{cases} 1 \\ 5 \end{cases}$







ÉK $[0; 12]$

ÉK

ÉT

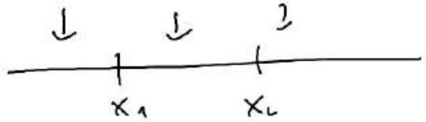
$p < 0$ nincs

$p > 12$ nincs

A *p* valós paraméter értékétől függően hány megoldása van az $|x^2 - 6x + 5| = p$ egyenletnek [0;7] intervallumon?

$p > 0$

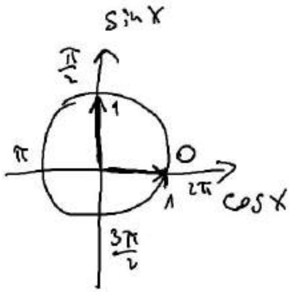
$x \,\begin{cases} x_1 \\ x_2 \end{cases}$



$-x_1$

$+x_1$

3. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!



$$\frac{x^2-10x-24}{x^2-x-6} = \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1} - \underbrace{\lg 1}_{0} + \underbrace{2^{\log_2 9}}_{9} = 10$$

/1 /1 /1

$lg = \log_{10}$

$10^0 = 1$

$$\frac{(x-4)(x-6)}{(x+2)(x-3)} = 10$$

$x^2 - \cancel{10x} - 24 = 10x^2 - \cancel{10x} - 60$

$9x^2 - 36 = 0 \quad /:9$

$x^2 - 4 = 0 \qquad x^2 = 4$ /4

$x \begin{cases} 2 \\ -2 \end{cases}$ /2

Kikötés:

$x^2 - x - 6 \neq 0$

$x \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases} \qquad x \neq -2 ; 3$ /1

$\log_2 9 = \underbrace{3,169925...}_{9}$

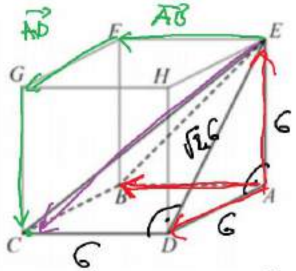
$2^{3,169925...}$

Ell.:

$$\frac{2^2 - 10\cdot 2 - 24}{2^2 - 2 - 6} = 10$$ /1

$$\frac{4-20-24}{4-2-6} = \frac{-40}{-4} = \underline{\underline{10}}$$

4. Az ABCDEFGH kocka élhosszúsága 6 cm.



a) Számítsa ki az ábrán látható ABCDE gúla felszínét!

$A = T_{ABCD} + T_{EDA} + T_{AEB} + T_{CBE} + T_{CDE}$ /1

$-\vec{AE}$

$T_{ABCD} = 6^2 = 36\ cm^2$ /1

$\sqrt{6^2+6^2} = \sqrt{2}\cdot 6$ /1

$T_{DAE} = T_{AEB} = \dfrac{6\cdot 6}{2} = 18\ cm^2$ /1

$T_{CDE} = T_{BCE} = \dfrac{6\sqrt{2}\cdot 6}{2} = \sqrt{2}\cdot 18$ /1

$A = 36 + 2\cdot 18 + 2\cdot\sqrt{2}\cdot 18 = 122{,}911\ cm^2$ /1

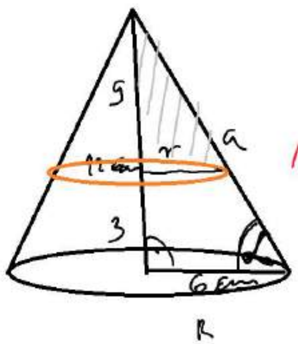
b) Fejezze ki az $\overrightarrow{EC}$ vektort az $\overrightarrow{AB}$, az $\overrightarrow{AD}$ és az $\overrightarrow{AE}$ vektorok segítségével. $\vec{EC} = \vec{AB} + \vec{AD} - \vec{AE}$ /3

Egy 12 cm magas forgáskúp alapkörének a sugara 6cm.

c) Mekkora szöget zár be a kúp alkotója az alaplappal?

$tg\,\alpha = \dfrac{12}{6}$ /1

$\alpha = arctg\left(\dfrac{12}{6}\right) = 63{,}4349^\circ$ /1



/1

/1

A fenti forgáskúpot két részre vágjuk az alaplap síkjával párhuzamos síkkal. Az alaplap és a párhuzamos sík távolsága 3 cm.

d) Számítsa ki a keletkező csonkakúp térfogatát!

$\dfrac{9}{r} = \dfrac{12}{6}$ /1 $\longrightarrow r = 4{,}5$ /1

$V = \dfrac{m\pi\left[R^2 + Rr + r^2\right]}{3}$

$V = \dfrac{3\cdot\pi\cdot(6^2 + 6\cdot 4{,}5 + 4{,}5^2)}{3}$ /1 $= 261{,}5376\ cm^3$ /1

3. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet! $x \neq -2;\ 3$

$$\longrightarrow \frac{x^2-10x-24}{x^2-x-6} = \underbrace{\sin\frac{\pi}{2} - \lg 1 + 2^{\log_2 9}}_{10} \quad /(x^2-x-6)$$

$x \lessgtr {12 \atop -2}$

$(\ldots)(\ldots)$

$x^2 - \cancel{10x} - 24 = 10x^2 - \cancel{10x} - 60 \quad /+10x \quad /-x^2$

$-24 = 9x^2 - 60 \quad /+24$

$0 = 9x^2 - 36 \quad /:9$

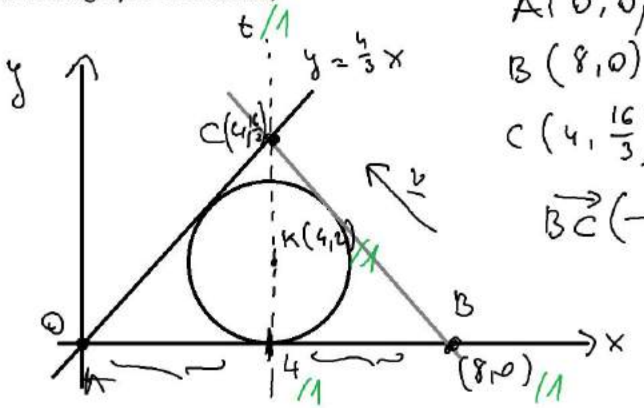
$0 = x^2 - 4 \qquad x^2 = 4 \qquad x \lessgtr {2 \atop -2} \longrightarrow$ -2 ↯

Ell.: 2 ✓

5. Egy háromszög két oldalegyenese: az x tengely, valamint az $y = \frac{4}{3}x$ egyenletű egyenes. Ismerjük a háromszög beírt körének egyenletét is: $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 4$.

Írja fel a háromszög harmadik oldalegyenesének egyenletét, ha a háromszög egyenlő szárú, és

a) az alapja az x tengelyre illeszkedik;



$A(0,0)$

$B(8,0)$

$C\left(4, \frac{16}{3}\right)$ /1

$y = \frac{4}{3} \cdot 4 = \frac{16}{3}$

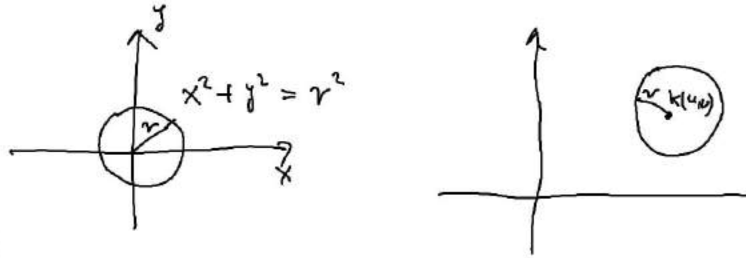
$\overrightarrow{BC}\left(-4, \frac{16}{3}\right)$ /1

$\underline{n}\left(\frac{16}{3}, 4\right)$

$e: \frac{16}{3}x + 4y = 8 \cdot \frac{16}{3} + 0 \cdot 4 \quad / \cdot 3$

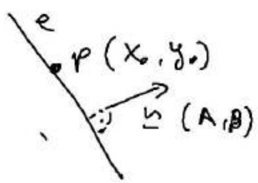
$16x + 12y = 128 \quad / : 4$

$\underline{\underline{4x + 3y = 32}}$ /1



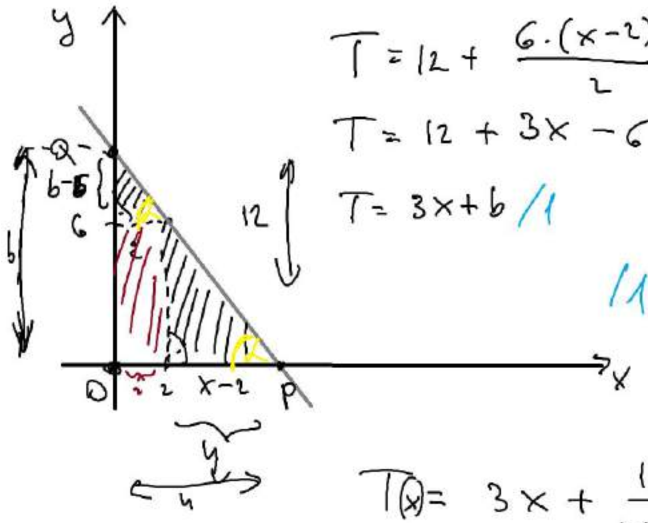
$(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$

$y = mx + b$



$e: \quad Ax + By = Ax_0 + By_0$

Az $y = ax + b$ egyenletű egyenes illeszkedik a (2;6) pontra. Tudjuk, hogy a < 0. Jelölje az x tengely és az egyenes metszéspontját P, az y tengely és az egyenes metszéspontját pedig Q. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelyre az OPQ háromszög területe a legkisebb, és számítsa ki ezt a területet (O a koordináta-rendszer origóját jelöli)!



$$T = 12 + \frac{6\cdot(x-2)}{2} + \frac{2\cdot(b-6)}{2} \quad /1$$

$$T = 12 + 3x - 6 + b - 6$$

$$T = 3x + b \quad /1$$

/1

$$\frac{b-6}{2} = \frac{6}{x-2} \quad /1 \quad /\cdot 2 \quad /+6$$

$$b = \frac{12}{x-2} + 6 \quad /1$$

$$T(x) = 3x + \frac{12}{x-2} + 6$$

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	$n\cdot x^{n-1}$
c	0

$$T'(x) = 3 - \frac{12}{(x-2)^2} = 0 \quad /1 \quad /:3$$

/2

$x \neq 2$

$m = -3$ /1

$$1 - \frac{4}{(x-2)^2} = 0 \quad /+\frac{4}{(x-2)^2}$$

$$1 = \frac{4}{(x-2)^2} \quad /\cdot(x-2)^2$$

$$(x-2)^2 = 4 \quad /\sqrt{(\ldots)}$$

$$x - 2 = \pm 2$$

$\to$ $\underline{x = 0}$ $\cancel{\ }$ /1 $x > 2$

$\to$ $\underline{x = 4}$

$b = 12$

$T''(4) > 0$ /1 $\quad y = -3x + 12$ /1 $\quad T = 24$ egység /1